

9.2. PUTERI. CIRCUITE ELECTRICE LINIARE IN REGIM NESINUSOIDAL

9.2.1. Puteri in regim nesinusoidal

9.2.1.1. Puterea activa

Este definita ca valoarea medie in raport cu o perioada a puterii electromagnetice instantanee:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)i(t)dt \quad (9.2.1)$$

$$\text{unde } u(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2}U_n \sin n\omega t$$

$$\text{iar } i(t) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} i_n(t) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2}I_n \sin(n\omega t - \varphi_n)$$

$$u_n = U_{nm} \sin n\omega t = \sqrt{2}U_n \sin n\omega t$$

$$i_n = I_{nm} \sin(n\omega t - \varphi_n) = \sqrt{2}I_n \sin(n\omega t - \varphi_n).$$

U_n si I_n reprezinta valoarea efectiva a tensiunii respectiv a curentului corespunzatoare armonicii n , iar φ_n reprezinta defazajul dintre tensiune si curent corespunzator armonicii n .

Pentru usurinta calculelor presupunem fazele initiale ale celor doua marimi nule.

Puterea activa va fi:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T u i dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left(U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2}U_n \sin n\omega t \right) \cdot \left[I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2}I_n \sin(n\omega t - \varphi_n) \right] dt \\ &= U_0 I_0 + \frac{U_0}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T \sqrt{2}I_n \sin(n\omega t - \varphi_n) dt + \frac{I_0}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T \sqrt{2}U_n \sin n\omega t dt + \\ &+ \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{n,\lambda=1}^{\infty} (\sqrt{2}U_n \sin n\omega t) \sqrt{2}I_\lambda \sin(\lambda\omega t - \varphi_\lambda) dt \end{aligned} \quad (9.2.2)$$

cu notatia:

$$\sum_{n;\lambda=1}^{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \cdot \sum_{\lambda=1}^{\infty}$$

$$\text{sau } P = U_0 I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n \cos \varphi_n \quad (9.2.3)$$

$$\text{in care } \frac{1}{T} \int_0^T u_n i_\lambda dt = 0 \quad \text{pentru } n \neq \lambda$$

Puterea activa in regim nesinusoidal este suma dintre produsul termenilor constanti (puterea de curent continuu) si suma puterilor active corespunzatoare fiecarei armonici in parte.

9.2.1.2. Puterea reactiva

Este definita in mod analog ca suma a puterilor reactive ale armonicilor de acelasi ordin si se exprima:

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n \sin \varphi_n \quad (9.2.4)$$

9.2.1.3. Puterea aparenta

Se defineste prin produsul valorilor efective ale tensiunii si curentului.

$$S = UI = \sqrt{(U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots)} \cdot \sqrt{(I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots)} \quad (9.2.5)$$

9.2.1.4. Puterea deformanta

In regim sinusoidal, relatia dintre cele trei puteri era: $S^2 = P^2 + Q^2$. In regim nesinusoidal, relatia dintre puteri devine:

$$S^2 = P^2 + Q^2 + D^2 \quad (9.2.6)$$

unde D este puterea deformanta, masurata cu unitatea denumita Volt-ampere-deformant (VAD). Expresia puterii deformante se obtine având in vedere ca:

$$\begin{aligned} D^2 &= S^2 - (P^2 + Q^2) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n^2 \sum_{\lambda=0}^{\infty} I_{\lambda}^2 - \left[\left(\sum_{n=0}^{\infty} U_n I_n \cos \varphi_n \right)^2 + \left(\sum_{\lambda=0}^{\infty} U_{\lambda} I_{\lambda} \sin \varphi_{\lambda} \right)^2 \right] \\ &= \sum_{\substack{n, \lambda=0 \\ n \neq \lambda}}^{\infty} \left[U_n^2 I_{\lambda}^2 - 2 U_n U_{\lambda} I_n I_{\lambda} \cos(\varphi_n - \varphi_{\lambda}) \right] \end{aligned} \quad (9.2.7)$$

sau folosind notatia $\sum_{n, \lambda=0}^{\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \cdot \sum_{\lambda=0}^{\infty}$ se obtine:

$$D = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} \cdot \sum_{\substack{\lambda=0 \\ n \neq \lambda}}^{\infty} (U_n^2 I_{\lambda}^2 - 2 U_n U_{\lambda} I_n I_{\lambda} \cos(\varphi_n - \varphi_{\lambda}))} \quad (9.2.8)$$

9.2.2. Calculul circuitelor electrice liniare in regim nesinusoidal

In cazul circuitelor electrice liniare (R, L, C) alimentate cu tensiuni nesinusoidale de forma:

$$u(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_{nm} \sin n\omega t, \text{ calculul curenților în regim permanent se face}$$

prin aplicarea principiului superpoziției. Fiecare armonică a curentului se calculează ca și cum ar acționa numai armonică de același ordin a tensiunii la borne.

Curentul rezultat este egal cu suma armonicilor.

$$i(t) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_{nm} \sin(n\omega t - \varphi_n) \quad (9.2.9)$$

în care φ_n este defazajul dintre tensiune și curent

$$I_{nm} = \frac{U_{nm}}{Z_n} = \frac{U_{nm}}{\sqrt{R^2 + \left(n\omega L - \frac{1}{n\omega C}\right)^2}}; \quad \varphi_n = \arctg \frac{n\omega L - \frac{1}{n\omega C}}{R} \quad (9.2.10)$$

Componenta continuă a curentului permanent este nulă, $I_0 = 0$, deoarece în circuit există un condensator.

Pentru armonică de un anumit ordin este posibil să apară în circuit fenomenul de rezonanță.

$$n\omega L - \frac{1}{n\omega C} = 0 \quad (9.2.11)$$

Dacă circuitul conține numai rezistorul R , atunci armonicile curentului sunt în fază cu armonicile tensiunilor ($\varphi_n = 0$).

În acest caz, amplitudinile armonicilor curentului, respectiv valoarea constantă a curentului sunt:

$$I_{nm} = \frac{U_{nm}}{R} \quad \text{și} \quad I_0 = \frac{U_0}{R} \quad (9.2.12)$$

Dacă circuitul conține numai o bobină ideală cu inductivitatea L , și tensiunea la borne nu are componentă continuă, armonică de ordinul n a tensiunii va fi:

$$u_n(t) = L \frac{di_n(t)}{dt} = n\omega L I_{nm} \sin\left(n\omega t - \varphi_n - \frac{\pi}{2}\right) \quad (9.2.13)$$

$$\text{unde } u_n(t) = U_{nm} \sin n\omega t \quad (9.2.14)$$

Din relațiile (9.2.13) și (9.2.14) reiese că:

$$U_{nm} = n\omega L \cdot I_{nm} = X_{nL} \cdot I_{nm}$$

$$\text{sau } I_{nm} = \frac{U_{nm}}{n\omega L} \quad (9.2.15)$$

În cazul bobinei amplitudinile armonicilor curentului devin tot mai mici pe măsură ce crește ordinul n al armonicii, deoarece reactanța inductivă $X_{nL} = n\omega L$ devine tot mai mare. De aici rezultă rolul de tampon al bobinei pentru armonicile superioare ale curentului, ceea ce folosește în practică la construcția filtrelor electrice.

Daca circuitul este constituit numai dintr-un condensator ideal de capacitate C, armonica n a curentului va fi:

$$u_n(t) = U_{nm} \sin n\omega t = \frac{1}{C} \int I_{nm} \sin(n\omega t - \varphi_n) dt$$

$$u_n(t) = \frac{I_{nm}}{n\omega C} \sin\left(n\omega t - \varphi_n - \frac{\pi}{2}\right) \quad (9.2.16)$$

De aici prin identificare rezulta:

$$U_{nm} = \frac{I_{nm}}{n\omega C}$$

$$I_{nm} = n\omega C U_{nm} = \frac{U_{nm}}{X_{nc}} \quad (9.2.17)$$

unde $X_{nc} = \frac{1}{n\omega C}$ este reactanta capacitiva a armonicii n.

Amplitudinile armonicilor curentului devin tot mai mari pe masura ce creste ordinul n al armonicii, deoarece reactanta capacitiva X_{nc} devine tot mai mica pentru armonicile superioare.

Ca urmare condensatorul constituie un element de suntare (scurt-circuitare) a armonicilor curentului de frecventa ridicata, ceea ce, de asemenea prezinta importanta pentru realizarea filtrelor electrice.

9.2.3. Filtre electrice

Impedanta unui circuit linear, corespunzator armonicii de ordinul n a tensiunii, respectiv curentului se calculeaza cu relatia:

$$Z_n = \sqrt{R^2 + \left(n\omega L - \frac{1}{n\omega C}\right)^2} \quad (9.2.18)$$

Defazajul dintre armonicile de acelasi ordin n al curentului si tensiunii depinde de acest ordin

$$\varphi_n = \text{arctg} \frac{n\omega L - 1/n\omega C}{R} \quad (9.2.19)$$

Pe baza acestor considerente functioneaza filtrele electrice care au rolul de a opri, sau de a permite, trecerea prin circuit a componentelor armonice cuprinse intr-o anumita banda de frecventa.

Filtrele electrice sunt cu doua borne de intrare si doua borne de iesire, intercalate intre sursa si receptor, fiind folosite pe scara larga in schemele aparatelor electronice, in sistemele de comanda si automatizari, la instalatiile de redresare a curentului alternativ etc.

Parametrii caracteristici a unui filtru sunt atenuarea si defazajul.

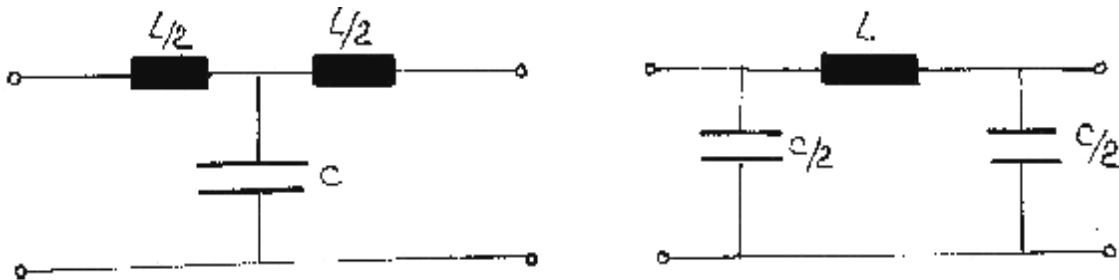
a) **Atenuarea** se exprima in functie de raportul dintre marimea de intrare si marime de iesire. In functie de destinatia filtrului, raportul se face intre puteri, tensiuni sau intre curenti.

$$a = \frac{1}{2} \ln \frac{P_i}{P_e} \quad [\text{Np}]; \quad a = 10 \log \frac{P_i}{P_e} \quad [\text{dB}]$$

$$a = \ln \frac{U_i}{U_e} \text{ [Np]}; \quad a = 20 \log \frac{U_i}{U_e} \text{ [dB]}$$

$$a = \ln \frac{I_i}{I_e} \text{ [Np]}; \quad a = 20 \log \frac{I_i}{I_e} \text{ [dB]} \quad (9.2.20)$$

Neperul (Np) și decibelul (dB) sunt unități de măsură a atenuării. Valoarea cu semn schimbat a atenuării se numește câștig (amplificare).



a) cu două bobine și un condensator

b) cu o bobină și două condensatoare

Fig. 9.2.1 Schema filtrului trece jos

b) **Defazajul** se referă la unghiul dintre mărimea de intrare și mărimea de ieșire (când acestea sunt tensiuni sau curenți cu variație sinusoidală în timp).

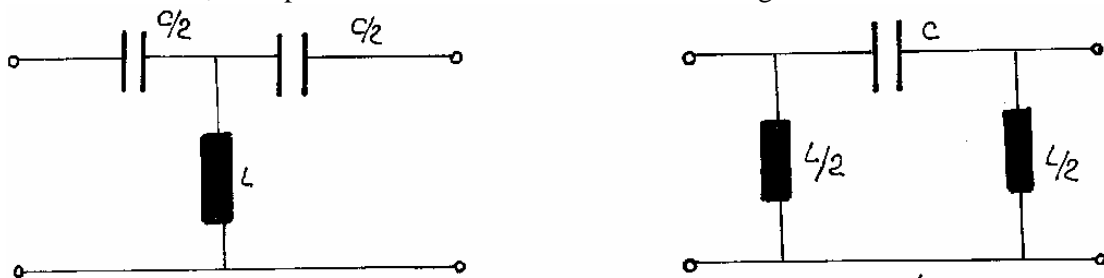
Dependența de frecvență a atenuării și defazajului constituie caracteristicile de frecvență ale filtrului.

Filtrul (fig. 9.2.1.a, b) a cărui caracteristică de frecvență prezintă o bandă de trecere cuprinsă între frecvențele $f_1 = 0$ și $f_2 = f_c$ se numește filtru trece jos.

Frecvența f_c se numește frecvență de tăiere superioară și corespunde unei atenuări mai mici, cel mult egală cu 3 dB.

Filtrul (fig. 9.2.2.a, b) a cărui caracteristică de frecvență reprezintă o bandă de trecere cuprinsă între frecvențele $f_1 = f_c$ denumită de tăiere inferioară și $f_2 = \infty$ se numește filtru trece sus.

Frecvența f_c corespunde unei atenuări mari sau cel mult egală cu 3 dB.

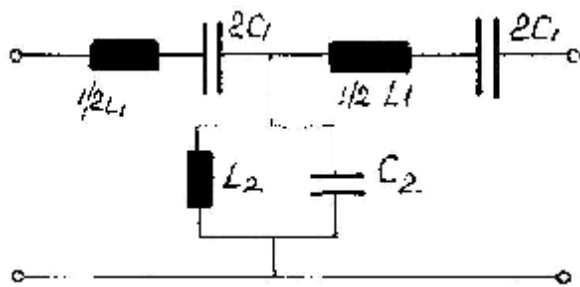


a) cu două condensatoare și o bobină

b) cu un condensator și două bobine

Fig. 9.2.2. Schema filtrului trece sus

În fig. 9.2.3 este prezentată schema unui filtru trece-banda care poate fi de bandă îngustă sau bandă largă.



Filtrele reale contin si rezistoare (de exemplu rezistenta proprie a bobinelor) care provoaca atât atenuare, cât si pierderi de putere prin efect Joule-Lenz.

Fig. 9.2.3

9.2.4. Teoremele lui Kirchhoff pentru circuite liniare in regim

periodic nesinusoidal

In regim nesinusoidal curentii $i_k(t)$ si tensiunile $u_{bm}(t)$ fiind functii periodice de timp, admit dezvoltari in serie Fourier.

Notând cu $i_k^{(n)}(t)$ si $u_{bm}^{(n)}(t)$ armonicile de ordinul n , ecuatiile corespunzatoare teoremelor lui Kirchhoff se scriu sub forma.

$$\sum_{k \in (b)} \left\{ I_{k0} + \sum_{n=1}^{\infty} i_k^{(n)}(t) \right\} = 0; \quad (b = 1, 2, \dots, N-S)$$

$$\sum_{m \in (p)} \left\{ U_{bm0} + \sum_{n=1}^{\infty} u_{bm}^{(n)}(t) \right\} = 0; \quad (p = 1, 2, \dots, O) \quad (9.2.21)$$

Deoarece primii membri ai ecuatiilor reprezinta fiecare câte o serie Fourier si fiindca o serie Fourier este identic nula daca termenul continuu si coeficientii armonicilor sunt nuli, rezulta ca in regim periodic nesinusoidal teoremele lui Kirchhoff se scriu separat pentru termenul continuu si separat pentru fiecare armonica.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{K \in (b)} I_{k0} = 0 \quad (b = 1, 2, \dots, N - S) \\ \sum_{m \in (p)} U_{bm0} = 0 \quad (p = 1, 2, \dots, O) \end{array} \right. \quad (9.2.22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{K \in (b)} i_k^{(n)}(t) = 0 \quad n = 1, 2, \dots, \infty; \quad b = \overline{1, N - S} \\ \sum_{m \in (p)} u_{bm}^{(n)}(t) = 0 \quad n = 1, 2, \dots, \infty; \quad p = \overline{1, O} \end{array} \right. \quad (9.2.23)$$

In circuitele liniare aflate in regim periodic, curentii din laturi si tensiunile la bornele elementelor pasive sunt nesinusoidale datorita t.e.m. si injectiilor de curent nesinusoidale ale generatoarelor.

9.2.5. Retele liniare trifazate echilibrate sub tensiuni la borne simetrice nesinusoidale

Un sistem de trei marimi periodice (de exemplu t.e.m.) $e_1(t)$, $e_2(t)$, $e_3(t)$ formeaza un sistem trifazat simetric de succesiune directa, daca $e_2(t)$ rezulta din $e_1(t)$ cu întârziere de o treime din perioada, iar $e_3(t)$ rezulta din $e_1(t)$ cu o întârziere de doua treimi de perioada.

$$\begin{aligned}
e_1(t) &= e(t) \\
e_2(t) &= e\left(t - \frac{T}{3}\right) \\
e_3(t) &= e\left(t - \frac{2T}{3}\right)
\end{aligned} \tag{9.2.24}$$

Dezvoltarile in serie Fourier ale marimilor $e_1(t)$, $e_2(t)$, $e_3(t)$:

$$\begin{aligned}
e_1(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sqrt{2} \sin(n\omega t + \alpha_n) \\
e_2(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sqrt{2} \sin\left[n\omega\left(t - \frac{T}{3}\right) + \alpha_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sqrt{2} \sin\left(n\omega t + \alpha_n - \frac{2n\pi}{3}\right) \\
e_3(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sqrt{2} \sin\left[n\omega\left(t - \frac{2T}{3}\right) + \alpha_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sqrt{2} \sin\left(n\omega t + \alpha_n - \frac{4n\pi}{3}\right)
\end{aligned} \tag{9.2.25}$$

pun in evidenta urmatoarele proprietati:

a) armonicile de ordin $n=3K$ sunt in faza si formeaza sisteme omopolare.

$$\begin{aligned}
e_1^{(3K)}(t) &= E^{(3K)} \sqrt{2} \sin[3K\omega t + \alpha^{(3K)}] \\
e_2^{(3K)}(t) &= E^{(3K)} \sqrt{2} \sin\left[3K\omega t^{(3K)} + \alpha^{(3K)} - 3K \frac{2\pi}{3}\right] = E^{(3K)} \sqrt{2} \sin[3K\omega t + \alpha^{(3K)}] \\
e_3^{(3K)}(t) &= E^{(3K)} \sqrt{2} \sin\left[3K\omega t^{(3K)} + \alpha^{(3K)} - 3K \frac{4\pi}{3}\right] = E^{(3K)} \sqrt{2} \sin[3K\omega t + \alpha^{(3K)}]
\end{aligned} \tag{9.2.26}$$

b) armonicile de ordin $n=3K+1$ formeaza sisteme de succesiune directa.

$$\begin{aligned}
e_1^{(3K+1)}(t) &= E^{(3K+1)} \sqrt{2} \sin[(3K+1)\omega t + \alpha^{(3K+1)}] \\
e_2^{(3K+1)}(t) &= E^{(3K+1)} \sqrt{2} \sin\left[(3K+1)\omega t + \alpha^{(3K+1)} - \frac{2\pi}{3}(3K+1)\right] = \\
&= E^{(3K+1)} \sqrt{2} \sin\left[(3K+1)\omega t + \alpha^{(3K+1)} - \frac{2\pi}{3}\right] \\
e_3^{(3K+1)}(t) &= E^{(3K+1)} \sqrt{2} \sin\left[(3K+1)\omega t + \alpha^{(3K+1)} - (3K+1)\frac{4\pi}{3}\right] = \\
&= E^{(3K+1)} \sqrt{2} \sin\left[(3K+1)\omega t + \alpha^{(3K+1)} - \frac{4\pi}{3}\right]
\end{aligned} \tag{9.2.27}$$

c) armonicile de ordin $n=3K+2$ formeaza sisteme de succesiune inversa

$$\begin{aligned}
e_1^{(3K+2)}(t) &= E^{(3K+2)} \sqrt{2} \sin\left[(3K+2)\omega t + \alpha^{(3K+2)}\right] \\
e_2^{(3K+2)}(t) &= E^{(3K+2)} \sqrt{2} \sin\left[(3K+2)\omega t + \alpha^{(3K+2)} - (3K+2)\frac{2\pi}{3}\right] = \\
&= E^{(3K+2)} \sqrt{2} \sin\left[(3K+2)\omega t + \alpha^{(3K+2)} + \frac{2\pi}{3}\right] \\
& \hspace{20em} (9.2.28) \\
e_3^{(3K+2)} &= E^{(3K+2)} \sqrt{2} \sin\left[(3K+2)\omega t + \alpha^{(3K+2)} - (3K+2)\frac{4\pi}{3}\right] = \\
&= E^{(3K+2)} \sqrt{2} \sin\left[(3K+2)\omega t + \alpha^{(3K+2)} + \frac{4\pi}{3}\right]
\end{aligned}$$

Proprietatile de mai sus sunt ilustrate in fig. 9.2.4.

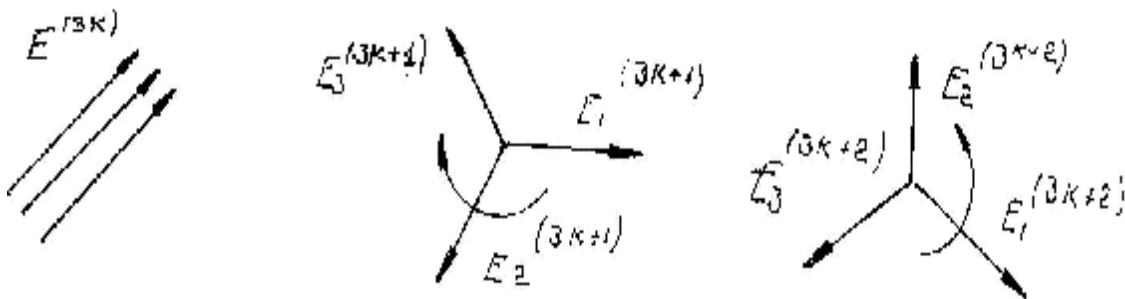


Fig. 9.2.4

Conexiunile retelelor sunt:

- conexiune in stea fara fir neutru;
- conexiune in stea cu fir neutru;
- conexiune in triunghi.