II. CIRCUITE ELECTRICE DE CURENT VARIABIL

CAP. 6.
A) Circuite monofazate in regim sinusoidal

Breviar

a) Marime periodica se numeste o marime variabila n(t) ale carei valori se repeta in aceeasi ordine la intervale egale ale variabilei t; o marime periodica n(t) satisface relatia:

$n(t)=n(t+n_T)$, n_T fiind un numar intreg.

b) valoarea instantanee a unei marimi functie de timp este valoarea acelei marimi la un moment dat t.

c) valoarea eficace N a unei marimi periodice n este radacina patrata a mediei patratelor valorilor instantanee in timpul unei perioade:

$$N = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T n^2(t)\cdot dt}$$

d) Marimea alternativa este o marime periodica n(t) a carei valoare medie pe o perioada este nula:

$$\int_0^T n(t)\cdot dt = 0$$

e) Marimea sinusoidala este o functie de variabila independenta t de forma:

$n(t) = N_m \cdot \sin(\omega t + \alpha)$ sau $n(t)=N_m\cdot\cos(\omega t+\beta)$

f) Teoremele lui Kirchhoff in valori instantanee sunt:

$$\sum i = 0$$

$$\sum e = \sum\left(r\cdot i + L\cdot\frac{di}{dt} + M\cdot\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i dt\right)$$

pentru regimul sinusoidal. In metoda simbolica, le corespund:

$\Sigma \underline{I} = 0$,

prima teorema a lui Kirchhoff in forma complexa, respectiv:

$$\sum \underline{E} = \sum\left(r\cdot\underline{I} + j\omega L\cdot\underline{I} + j\omega M\cdot\underline{I} + \frac{1}{j\omega C}\cdot\underline{I}\right)$$

a doua teorema a lui Kirchhoff in forma complexa.

g) Puterea complexa:

$$\underline{S} = P + jQ$$

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* \qquad \text{si } \underline{S}^* = \underline{U}^* \cdot \underline{I}$$

Rezulta: $P = R_e\left[\underline{U} \cdot \underline{I}^*\right]$ si $P = R_e\left[\underline{U}^* \cdot \underline{I}\right]$

$Q = I_m\left[\underline{U} \cdot \underline{I}^*\right]$ si $Q=-I_m\left[\underline{U}^* \cdot \underline{I}\right]$

6.1 (R) Un curent sinusoidal are amplitudinea I_{max}=10 A si frecventa f=50 Hz. Sa se determine:

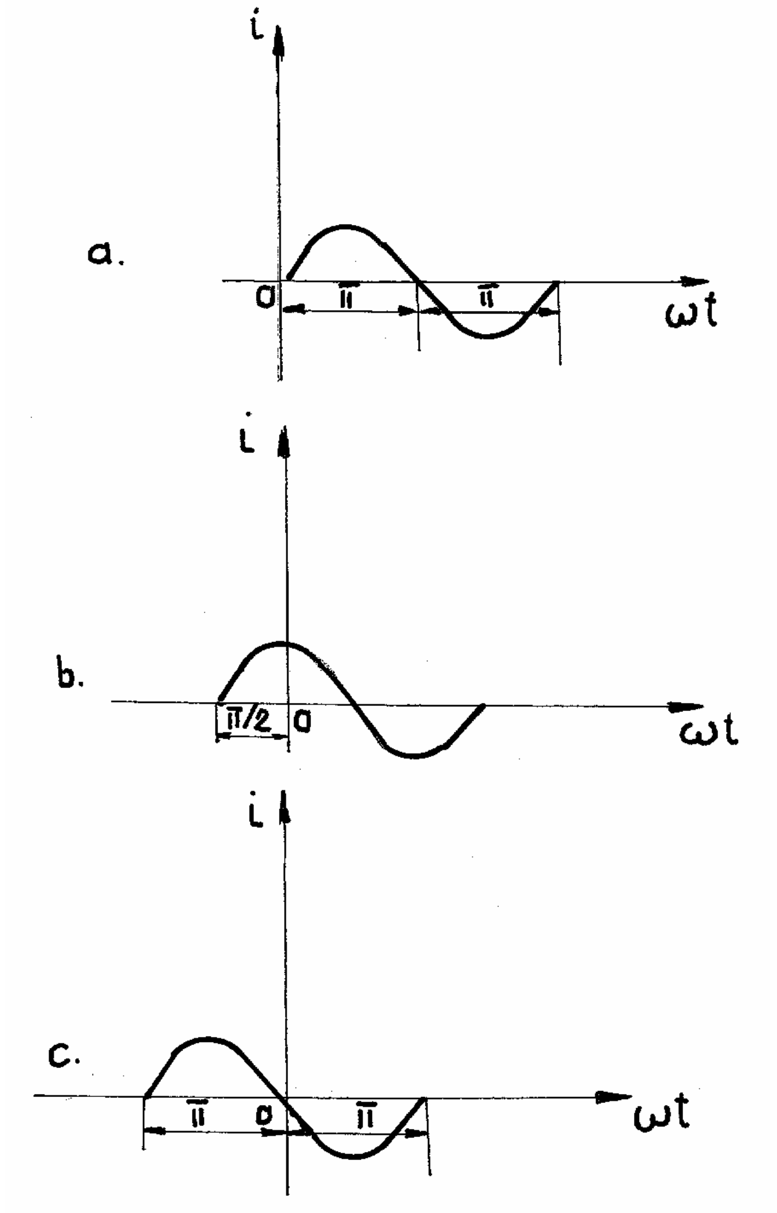

Fig. 6.1

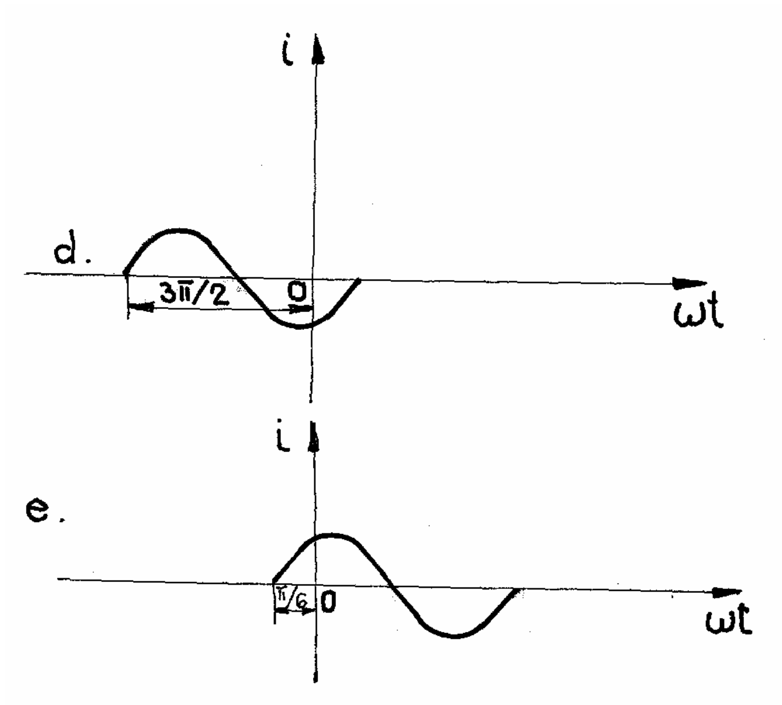

Fig. 6.1

a) valoarea efectiva, perioada T, pulsatia ω in rad/s si pulsatia in grade/s $\left(\omega' = \omega \cdot \frac{180^0}{\pi}\right)$;

b) Sa se scrie expresia valorii instantanee a curentului si sa se reprezinte grafic, considerând ca origine punctele in care: i=0 (functia creste); $i=I_{max}$; i=0 (functia descreste); $i=-I_{max}$; $i=\frac{I_{max}}{2}$ (functia creste).

c) Sa se exprime defazajele respective in radiani, grade si secunde si sa se scrie expresiile corespunzatoare.

Rezolvare:

a) valoarea efectiva a curentului alternativ sinusoidal a carui amplitudine este I_{max} este:

$$I = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 7{,}1 \text{ A}$$

Perioada este: $T=\frac{1}{f} = \frac{1}{50} = 0{,}28\text{s}$

Pulsatia este: $\omega=2\cdot\pi\cdot f=100\cdot\pi$rad/s

$\omega'=1{,}8\cdot10^4\ {}^0/\text{s}$

b) valoarea instantanee a curentului alternativ sinusoidal este in fiecare din cele cinci cazuri urmatoarea:

$i=10\sin(\omega t+0)$

$$i=10\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$i=10\sin(\omega t+\pi)$$
$$i=10\sin\left(\omega t+3\frac{\pi}{2}\right)$$
$$i=10\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{6}\right)$$

Reprezentarea grafica este cea din fig.6.1.

c) $i=10\sin\omega t$;

$$i=10\sin(\omega t+\pi/2)=10\sin(100\pi t+\pi/2)=10\sin\left(1{,}8\cdot10^{4}t+90^{0}\right)=$$
$$=10\sin\left[1{,}8\cdot10^{4}\left(t+5\cdot10^{-3}\right)\pi/180\right]$$
$$i=10\sin(\omega t+\pi)=10\sin(100\pi t+\pi)=10\sin\left[1{,}8\cdot10^{4}t+180^{0}\right]=$$
$$=10\sin\left[1{,}8\cdot10^{4}\left(t+10^{-2}\right)\pi/180\right]$$
$$i=10\sin(\omega t+3\pi/2)=10\sin\left(1{,}8\cdot10^{4}t+270^{0}\right)=$$
$$=10\sin\left[1{,}8\cdot10^{4}\left(t+1{,}5\cdot10^{-3}\right)\pi/180\right]$$
$$i=10\sin(\omega t+\pi/6)=10\sin(100\pi t+\pi/6)=10\sin\left(1{,}8\cdot10^{4}t+30^{0}\right)=$$
$$=10\sin\left[1{,}8\cdot10^{4}\left(t+5/3\cdot10^{-3}\right)\cdot\pi/180\right]$$

6.2. (R) Fiind date doua tensiuni electromotoare sinusoidale:

$e_1=30\sin(2512t-2\pi/3)$

$e_2=\sqrt{2}\cdot10\cdot\cos(2512t+\pi/3)$

Se cer:

a) perioada, frecventa, valoarea maxima, valoarea efectiva si valoarea instantanee pentru fiecare din cele doua tensiuni pentru $t=\frac{1}{600}$ s;

b) faza initiala a fiecarei tensiuni, defazajul dintre ele si reprezentarea grafica;

c) sa se determine si sa se reprezinte grafic functiile considerând o noua origine O′ a timpului, situata inaintea celei precedente cu 1/2400 s;

d) sa se scrie expresiile valorilor instantanee ale celor doua tensiuni, pentru cazul când originea de timp coincide cu momentul in care $e_1=E_1$, functiile mentinându-si defazajul intre ele.

Rezolvare:

a) Cunoscând pulsatia, frecventa este:

$$f=\frac{\omega}{2\cdot\pi}=\frac{2512}{2\cdot\pi}=\frac{800\cdot\pi}{2\cdot\pi}=400\text{Hz}$$
$$T=\frac{1}{f}=\frac{1}{400}=2{,}5\cdot10^{-3}\text{s}$$
$$E_{1max}=30\text{V},\ E_1=\frac{E_{1max}}{\sqrt{2}}=21{,}3\text{V}$$

$$E_{2max} = \sqrt{2} \cdot 10 = 14{,}1V; E_2 = \frac{E_{2max}}{\sqrt{2}} = 10V$$

$$e_1 = 30 \cdot \sin(800\pi \cdot 1/600 - 2\pi/3) = 30 \cdot \sin 2\pi/3 = 26V$$

$$e_2 = \sqrt{2} \cdot 10 \cos(800\pi \cdot 1/600 + \pi/3) = \sqrt{2} \cdot 10 \cdot \cos 5\pi/3 = 7{,}05V$$

b) $\varphi_{10} = 120^0 = 2\pi/3 \text{rad sau } 1/1200\text{ s}$

$$e_1 = 30 \cdot \sin(800\pi t - 2\pi/3) = 30 \cdot \sin 800\pi(t - 1/1200)$$

$$\varphi_{20} = -150^0 = -5\pi/6 \text{rad sau - } 1/960\text{ s}$$

$$e_2 = \sqrt{2} \cdot 10 \cdot \cos(800\pi t + \pi/3) = \sqrt{2} \cdot 10 \cdot \sin 800\pi(t + 1/960)$$

$$\varphi_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = 120^0 - (-150^0) = 270^0 \text{ sau}$$

$$\varphi_{12} = -90^0 = -\pi/2 \text{rad sau - } 3/1600\text{s}$$

T.e.m.e_1 este in urma cu 270^0 fata de t.e.m.e_2 sau inainte cu 90^0, adica e_1 si e_2 sunt in cuadratura (fig.6.2.a).

c) Considerând o noua origine O′ a timpului situata inaintea celei precedente cu 1/2400 s sau $\pi/3$ rad, t.e.m. devin:

$$e_1' = 30 \cdot \sin 800\pi(t - 1/1200 - 1/2400) = 30 \sin(800\pi t - \pi)$$

$$e_2' = \sqrt{2} \cdot 10 \cdot \sin 800\pi(t + 1/960 - 1/2400) = \sqrt{2} \cdot 10 \sin(800\pi t + \pi/2)$$

Cele doua t.e.m. se mentin bineinteles, in cuadratura. Reprezentarea grafica este cea din fig.6.2.b.

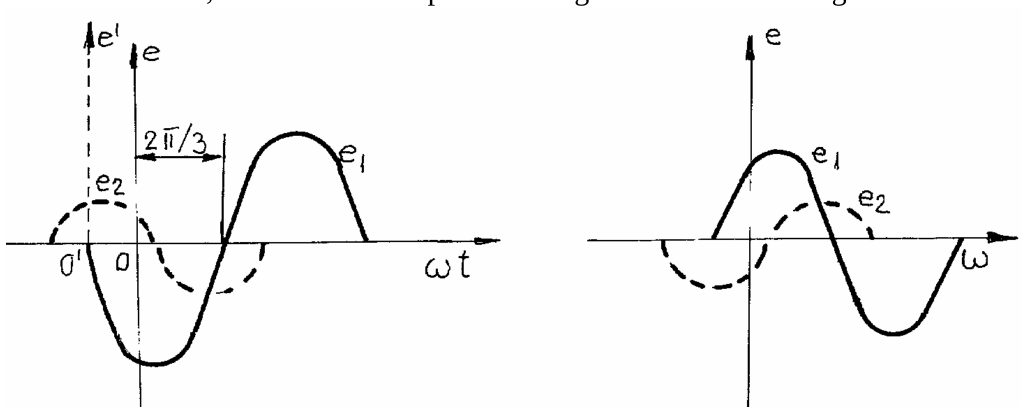

Fig. 6.2

d) e_1=30 sin(800πt-φ)

Trebuie determinat unghiul astfel incât la t=0, e_1=E_1.

Deci:

$$e_1 = E_1 = 30/\sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot 30/\sqrt{2} \sin(-\varphi_1)$$

$$\sin \varphi_1 = -\sqrt{2}/2; \varphi_1 = -\pi/4$$

Rezulta: $e_1 = 30 \cdot \sin(800\pi t + \pi/4)$

$$e_2 = \sqrt{2} \cdot 10 \cdot \sin(800\pi t - \pi/4)$$

6.3. (R) Trei conductoare care concura intr-un punct O sunt strabatute de curentii i_1, i_2, i. Fiind cunoscuti:

$$i_1 = 12 \cdot \sin(\omega t + \pi/6),$$

$$i_2 = 6 \cdot \sin(\omega t - \pi/3),$$

sa se determine:

a) expresia valorii instantanee a curentului i rezultant si valoarea lui efectiva;

b) sa se rezolve problema folosind reprezentarea simbolica grafica si analitica.

Rezolvare:

a) Folosind regula de adunare a marimilor sinusoidale valoarea maxima a curentului rezultant este:

$i=i_1+i_2=I\cdot\sin(\omega t-\varphi)$, unde:

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + 2I_1I_2 \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} = 13{,}45\,\mathrm{A}$$

Faza initiala φ este:

$$\varphi = \mathrm{arctg}\left(\frac{I_1 \sin\varphi_1 + I_2 \sin\varphi_2}{I_1 \cos\varphi_1 + I_2 \cos\varphi_2}\right) = -3^0 20'$$

Deci valoarea instantanee a curentului i este:

$I=13{,}45 \sin(\omega' t+3^0 20')$

Valoarea efectiva este:

$$i_{ef} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{13{,}45}{\sqrt{2}} = 9{,}53\,\mathrm{A}$$

b) Reprezentarea simbolica grafica:

b_1. Reprezentarea cinematica fig. 6.3.

Se asociaza marimilor scalare i_1, i_2 câte un vector in sistemul de axe rectangulare O Δ si O Δ'.

$$i_1 = 12 \cdot \sin(\omega' t + 30^0) \to \overline{OM_1} = 12$$

$$i_2 = 6 \cdot \sin(\omega' t - 60^0) \to \overline{OM_2} = 6$$

$$i = I \cdot \sin(\omega' t + \varphi^0)$$

Trebuie determinate din diagrama marimile I si φ.

Vectorii $\overline{OM_1}$ si $\overline{OM_2}$ asociati marimilor i_1 si i_2 se rotesc cu viteza unghiulara constanta in sensul trigonometric pozitiv. Din triunghiul dreptunghic OM_1M rezulta:

$$\overline{OM} = \sqrt{OM_1^2 + OM_2^2} = \sqrt{12^2 + 6^2} = 13{,}45$$

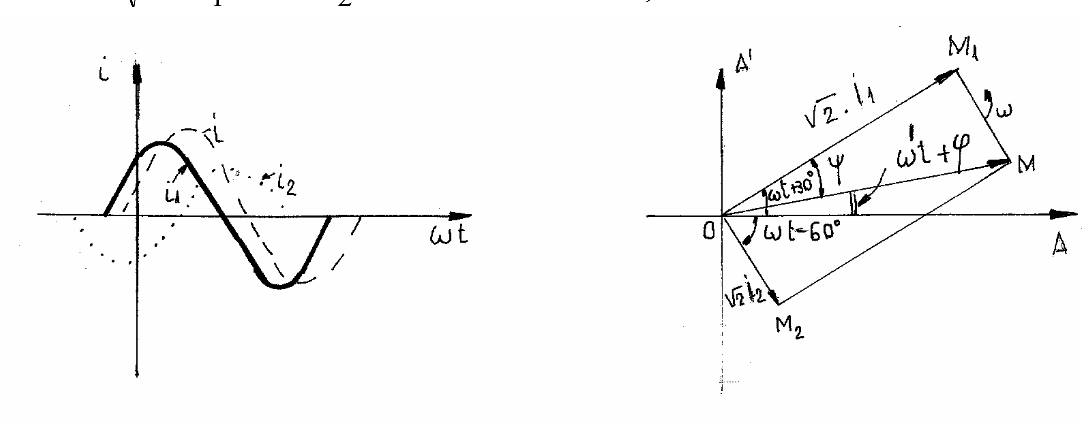

Fig. 6.3

Vectorul OM corespunde curentului rezultant i, deci:

$I_m=13{,}45$ A

$$tg\psi = \frac{\overline{M_1M}}{\overline{OM_1}} = 6/12 = 0{,}5; \psi = 26^0 40'$$

$$\omega' t + \varphi' = \omega' t + 30^0 - \psi = \omega' + 3^0 20'$$

Rezulta valoarea instantanee a curentului i:

$$i = 13{,}45 \sin\left(\omega' t + 3^0 20'\right)$$

b_2. Reprezentarea polara fig. 6.3.1.

Punând in evidenta valorile efective, expresiile valorilor instantanee ale celor doi curenti sunt:

$$i_1 = \sqrt{2} \cdot 8{,}5 \cdot \sin\left(\omega' t + 30^0\right)$$

$$i_2 = \sqrt{2} \cdot 4{,}25 \cdot \sin\left(\omega' t - 60^0\right)$$

$$i = \sqrt{2} \cdot I \cdot \sin\left(\omega' t + \varphi^0\right)$$

Valoarea efectiva I si faza φ se determina din diagrama.

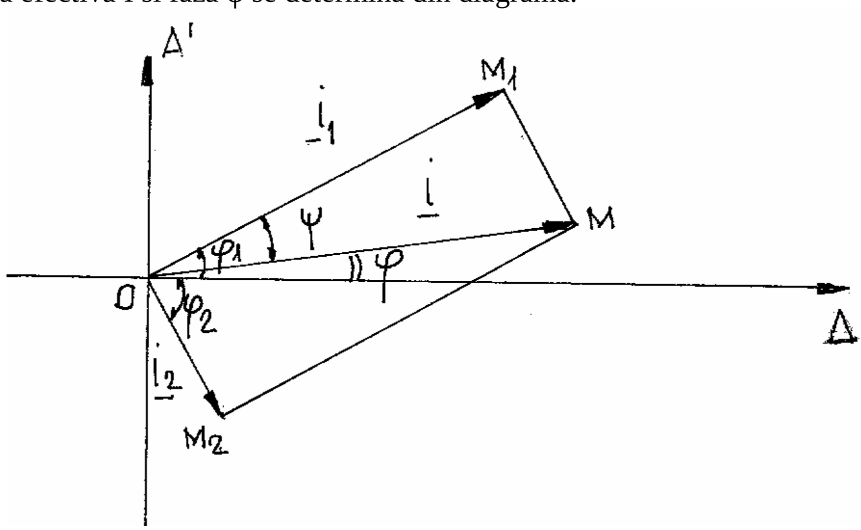

Fig. 6.3.1

Deosebirea fata de reprezentarea cinematica este ca vectorii reprezentativi ai celor doi curenti au modulul egal cu valoarea efectiva a curentului; unghiul fata de axa OΔ este egal cu faza initiala, iar axele se rotesc cu viteza unghiulara constanta ω in sens invers celui trigonometric, in timp ce vectorii stau pe loc.

Din triunghiul OM_1M rezulta:

$$\overline{OM} = \sqrt{\overline{OM_1^2} + \overline{MM_1^2}} = \sqrt{8{,}5^2 + 4{,}25^2} = 9{,}5 = I$$

$$tg\psi = \frac{\overline{MM_1}}{\overline{OM_1}} = \frac{4{,}25}{8{,}5} = 0{,}5; \psi = 26^0 40'$$

$$\varphi = 30^0 - 26^0 40' = 3^0 20'$$

$$i = \sqrt{2} \cdot 9{,}5 \cdot \sin\left(\omega' t + 3^0 20'\right)$$

c) Reprezentarea simbolica analitica:

c_1. Reprezentarea in complex nesimplificat fig. 6.3.2.a.

Se asociaza marimilor alternative sinusoidale i_1 si i_2 câte un numar complex.

$$i_1 = 12 \cdot \sin\left(\omega' t + 30\right)^0 \rightarrow \underline{i}_1 = 12 \cdot e^{j(\omega t + \pi/6)} =$$

$$= 12 \cdot \left[\cos(\omega' t + 30)^0 + j \cdot \sin(\omega' t + 3)^0\right]$$

$$i_2 = 6 \cdot \sin(\omega' t - 60)^0 \rightarrow \underline{i}_2 = 6 \cdot e^{j(\omega t - \pi/3)} =$$

$$= 6 \cdot \left[\cos(\omega' t - 60)^0 + j \cdot \sin(\omega' t - 60)^0\right]$$

$$i_1 = I_m[\underline{i}_1]; \quad i_2 = I_m[\underline{i}_2]$$

c_2. Reprezentarea in complex simplificat (folosita mai des) fig. 6.3.2.b:

$$i_1 = \sqrt{2} \cdot 8{,}5 \cdot \sin(\omega' t + 30)^0 \rightarrow \underline{I}_1 = 8{,}5 \cdot e^{j \cdot 30^0 \cdot \pi : 180} =$$

$$= 8{,}5\left(\cos 30^0 + j \cdot \sin 30^0\right)$$

$$i_2 = \sqrt{2} \cdot 4{,}25 \cdot \sin\left(\omega' t - 60^0\right) \rightarrow \underline{I}_2 = 4{,}25 \cdot e^{-j \cdot 60^0 \cdot \pi : 180^0} =$$

$$= 4{,}25 \cdot \left(\cos 60^0 - j \cdot \sin 60^0\right)$$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \cos 30^0 \cdot 8{,}5 + 4{,}25 \cdot \cos 60^0 + j\left(8{,}5 \cdot \sin 30^0 - 4{,}25 \cdot \sin 60^0\right) =$$

$$= 9{,}47 + j \cdot 0{,}575 = 9{,}5 \cdot e^{j \cdot 3^0 28' \cdot \pi : 180^0}$$

$$i = \mathrm{Im} \cdot \left(\sqrt{2} \cdot e^{j\omega t} \underline{I}\right) = \mathrm{Im}\left(2 \cdot e^{j\omega t} \cdot 9{,}5 \cdot e^{j^{3^0 28' \pi : 180^0}}\right) =$$

$$= \sqrt{2} \cdot 9{,}5 \cdot \sin\left(\omega' t + 3^0 28'\right)$$

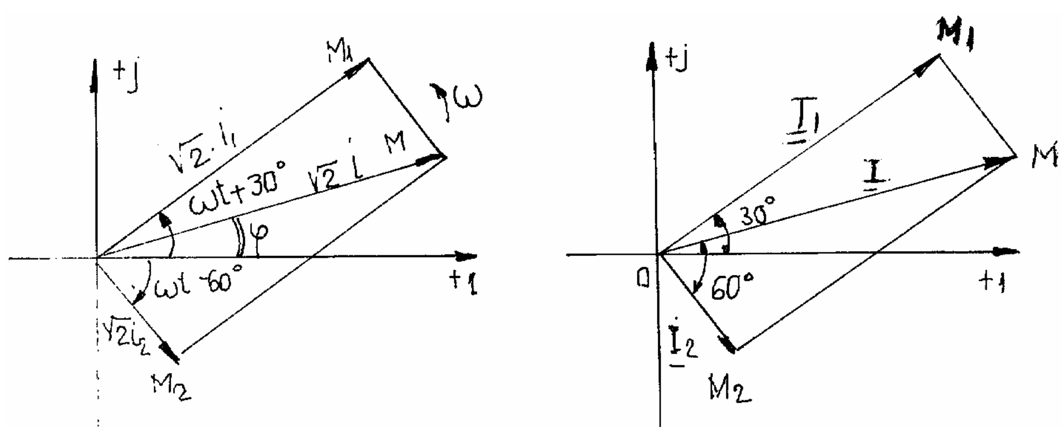

Fig. 6.3.2 a, b

De obicei se foloseste calculul in complex, concomitent cu reprezentarea grafica care are avantajul ca ilustreaza sugestiv relatiile de faza.

6.4. (R) Intr-un circuit format din trei receptori conectati in serie, tensiunile la bornele lor au valorile efective:

U_1=100 V; U_2=80 V; U_3=120 V

iar defazajele rezulta din diagrama urmatoare:

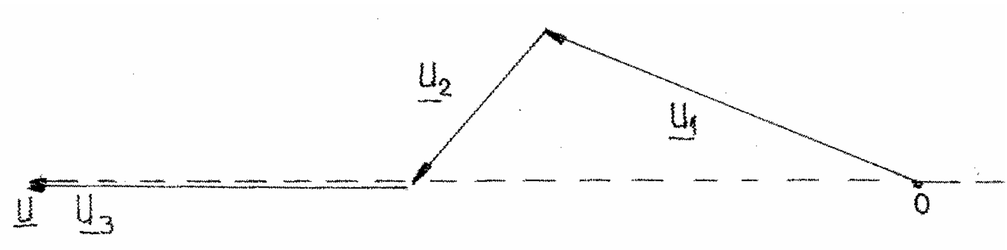

Fig.6.4

a) Sa se exprime tensiunile complexe $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3$ sub forma algoritmica si exponentiala.

b) sa se calculeze valoarea instantanee a tensiunii la borne si sa se construiasca grafic vectorul $\underline{U}$.

c) care trebuie sa fie valoarea $\underline{U}_2'$ a tensiunii $\underline{U}_2$ pentru ca $\underline{U}_3 = \underline{U}_1 + \underline{U}$.

Rezolvare:

a) $\underline{U}_1 = 100 \cdot e^{j \cdot 150^0 \cdot \pi : 180^0} = 100\left(\cos 150^0 - j \cdot \sin 150^0\right) = -86{,}5 + j \cdot 50$

$\underline{U}_2 = 80 \cdot e^{-j \cdot 140^0 \cdot \pi : 180^0} = 80\left[\cos\left(-140^0\right) + j \cdot \sin\left(-140^0\right)\right] = -61{,}5 - j \cdot 51$

$\underline{U}_3 = 120 \cdot e^{j \cdot 180^0 \cdot \pi : 180^0} = -120$

b) $\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3 = -268 - j \cdot 1 \cong 268 \cdot e^{-j \cdot \pi}$

$u = I_m\left[\sqrt{2} \cdot e^{j\omega t}\underline{U}\right] = \sqrt{2} \cdot 268 \cdot \sin(\omega t - \pi)$

$u = 378 \cdot \sin(\omega t - \pi)$

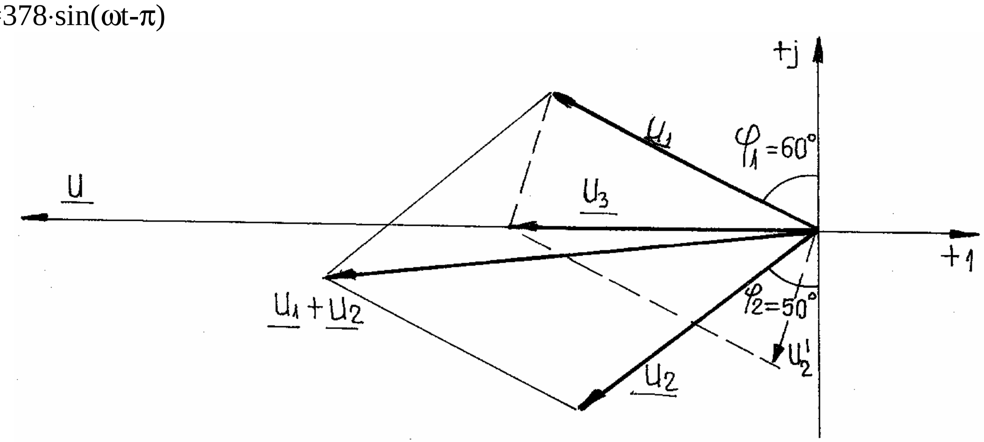

Fig. 6.4.1

c) $\underline{U}_2' = \underline{U}_3 - \underline{U}_1 = -33{,}5 - j \cdot 50$

$\underline{U}_2' = 60{,}2 \cdot e^{-j \cdot 124^0 \cdot \pi : 180^0}$

6.5. (R) Un circuit format dintr-un rezistor având rezistenta R_S=10Ω si o bobina fara rezistenta, având inductivitatea L_S=0,1 H, este alimentat sub o tensiune la borne alternativa sinusoidala, având valoarea efectiva U_b si pulsatia ω.

Se cere sa se calculeze inductivitatea L_p a bobinei si rezistenta R_p a rezistorului, care trebuie legate in paralel, pentru ca sub aceeasi tensiune la borne circuitul astfel format sa absoarba acelasi curent ca si primul circuit, sub acelasi defazaj al tensiunii la borne.

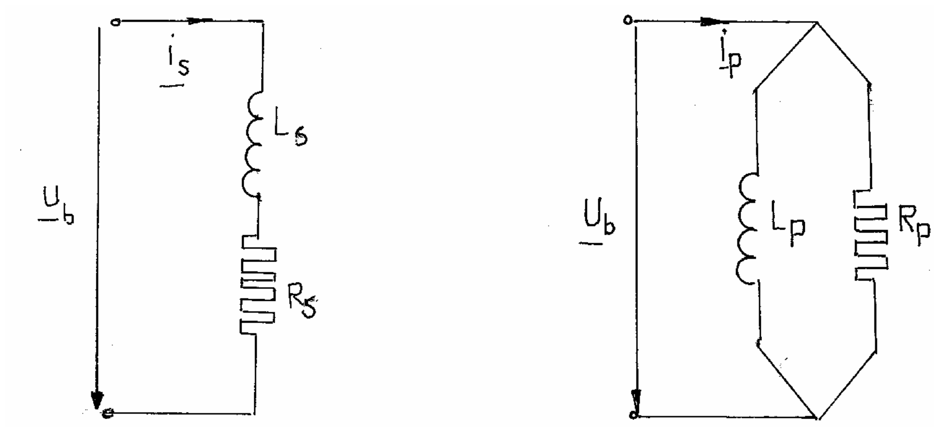

Fig. 6.5 a,b

Rezolvare: Impedanta montajului serie este:

$\underline{Z}_S = R_S + j \cdot \omega L_S$, iar admitanta:

$$\underline{Y}_S = \frac{1}{\underline{Z}_S} = \frac{1}{R_S + j \cdot \omega L_S}$$

Impedanta montajului paralel este:

$$\underline{Z}_p = \frac{1}{\underline{Y}_p} \text{ unde } \underline{Y}_p = \frac{1}{R_p} + \frac{1}{j \cdot \omega L_p}$$

Curentii I_S si I_p in cele doua cazuri au valorile:

$$\underline{I}_S = \frac{\underline{U}_b}{\underline{Z}_S} \text{ si } \underline{I}_p = \frac{\underline{U}_b}{\underline{Z}_p}$$

Punând conditia $\underline{I}_S = \underline{I}_p$ rezulta:

$$\underline{Z}_S = \underline{Z}_p \quad \text{sau} \quad \underline{Y}_S = \underline{Y}_p$$

Conditia devine:

$$\frac{1}{R_S + j \cdot \omega L_S} = \frac{1}{R_p} + \frac{1}{j \cdot \omega L_p}$$

$$\frac{R_S - j \cdot \omega L_S}{R_S^2 + \omega^2 L_S^2} = \frac{1}{R_p} - j \cdot \frac{1}{\omega L_p}$$

Egalând partile reale si imaginare se obtine:

$$R_p = R_S + \frac{\omega^2 \cdot L_S^2}{R_S} = 10 + 314^2 \cdot 0{,}1^2 / 10 = 108{,}5\Omega$$

$$L_p = L_S + \frac{R_S^2}{\omega^2 \cdot L_S} = 0{,}1 + 10^2 / 314^2 \cdot 0{,}1 = 0{,}1101\text{H}$$