CAP.8.

CIRCUITE ELECTRICE LINIARE IN REGIM PERIODIC NESINUSOIDAL

Breviar

a) *Functia periodica f(t) satisface relatia de definitie:*

f(t)=f(t+kt), unde: t – perioada functiei; si k=numar oarecare.

b) *Dezvoltarea in serie Fourier.*

Orice functie periodica f(t) de perioada T care satisface conditiile lui Dirichelet poate fi descompusa intr-o infinitate de sinusoide cu frecventele multipli ai frecventei f=1/T a functiei:

$$f(t)=C_0+\sum_{k=1}^{\infty}C_k\cdot\sin(k\omega t+\varphi_k)\ \text{sau}$$

$$f(t)=C_0+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\cdot\sin k\omega t+\sum_{k=1}^{\infty}B_k\cdot\cos k\omega t$$

c) *Coeficientii seriei Fourier pot fi determinati analitic cu relatiile:*

$$C_0=1/T\int_0^T f(t)\cdot dt;$$

$$A_k=2/T\int_0^T f(t)\cdot\sin k\omega t\cdot dt;$$

$$B_k=2/T\int_0^T f(t)\cdot\cos\cdot k\omega t;$$

$$C_k=\sqrt{A_k^2+B_k^2};\ tg\varphi_k=\frac{B_k}{A_k}.$$

d) *Valoarea eficace a tensiunii sau curentului nesinusoidal:*

$$U=\sqrt{1/T\int_0^T u^2dt}\ \text{si}\ I=\sqrt{1/T\int_0^T i^2dt}\ \text{sau}$$

$$U=\sqrt{\sum_k U_k^2}\ \text{si}\ I=\sqrt{\sum_k I_k^2}.$$

e) *Valoarea medie a tensiunii sau a curentului:*

$$U_{med}=1/T\int_0^T udt=U_0\quad \text{și}\quad I=1/T\int_0^T idt=I_0$$

f) *Factorul de forma al tensiunii, respectiv curentului sinusoidal este prin definitie*

$$F_u=U/U_{med,r};\quad F_i=I/I_{med,r}$$

g) *Factorul de ondulatie este definit de relatiile:*

$$\gamma_u = \frac{\sqrt{U^2 - U_0^2}}{U_0}; \qquad \gamma_i = \frac{\sqrt{I^2 - I_0^2}}{I_0}$$

h) Coeficientul de distorsiune se defineste prin relatiile:

$$\delta_u = \frac{\sqrt{U^2 - U_1^2 - U_0^2}}{\sqrt{U^2 - U_0^2}} \quad \text{și} \quad \delta_i = \frac{\sqrt{I^2 - I_1^2 - I_0^2}}{\sqrt{I^2 - I_0^2}}$$

i) Puterea activa a unui receptor monofazat in regim nesinusoidal este suma puterilor active corespunzatoare fiecarei armonice de tensiune si de curent:

$$P = U_0 \cdot I_0 + \sum_{k \geq 1} U_k \cdot I_k \cdot \cos \varphi_k$$

j) Puterea reactiva a unui receptor monofazat in regim nesinudoidal este suma puterilor reactive corespunzatoare fiecarei armonice:

$$Q = \sum_{k \geq 1} U_k \cdot I_k \cdot \sin \varphi_k .$$

k) Puterea aparenta este prin definitie produsul valorilor eficace ale tensiunii si curentului:

$$S = U \cdot I = \sqrt{\sum_k U_k^2 \cdot \sum_k I_k^2}$$

l) Puterea deformanta:

$$D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} .$$

8.1.(R). Sa se calculeze reactanta unei bobine de inductivitate L la bornele careia se aplica o tensiune nesinusoidala $u = \sum_{k=1}^{N} U_k \sqrt{2} \cdot \sin \omega t.$ Aplicatie numerica:

U_1=220 V; $U_3 = 30\ \text{V};\ U_5 = 10\ \text{V};\ L = 1/\pi\ \text{H};\ f = 50\ \text{Hz};\ k = 1, 3, 5.$

Rezolvare: Curentul care va trece prin bobina este:

$$i = \sum_{k=1}^{N} \frac{U_k \sqrt{2}}{k\omega L} \cdot \sin (k\omega t - \pi/2)$$

Reactanta echivalenta (aparenta) este:

$$X_e = \frac{U}{I} = \frac{\sqrt{\sum_k U_k^2}}{\sqrt{\sum_k I_k^2}} = \frac{\sqrt{\sum_k U_k^2}}{\sqrt{\sum_k \left(\frac{U_k}{k\omega L} \right)^2}}$$

Pentru datele numerice se obtine:

$$I_1 = 1\ \text{A};\ I_3 = 0{,}1\ \text{A};\ I_5 = 0{,}02\ \text{A}.$$

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_3^2 + I_5^2} = 1{,}005\ \text{A}\ \text{și}\ U = \sqrt{U_1^2 + U_3^2 + U_5^2} = 105\ \text{V}$$

Reactanta echivalenta a bobinei pentru tensiunea nesinosoidala $X_1=\underline{U} \approx 104{,}5\ \Omega$ rezulta practic egala cu reactanta pentru prima armonica, datorita distorsiunilor relativ reduse.

8.2.(R) Sa se determine aceleasi date cerute in problema de mai sus pentru cazul unui condensator de capacitate $C = 100/\pi\mu F$.

Rezolvare: Similar cu problema precedanta rezulta:

I_1=1 A; I_3=0,9 A; I_5=0,5 A de unde I=1,435 A si X_1=73Ω.

8.3.(R). Circuitul serie R – L, cu R = 2Ω si L = 6,66 mH (fig.8.3.a) este strabatut de un curent periodic, având forma de unda triunghiulara (fig.8.3.b.). Sa se determine variatia in timp a tensiunii aplicate la borne. Perioada este T = 20 ms.

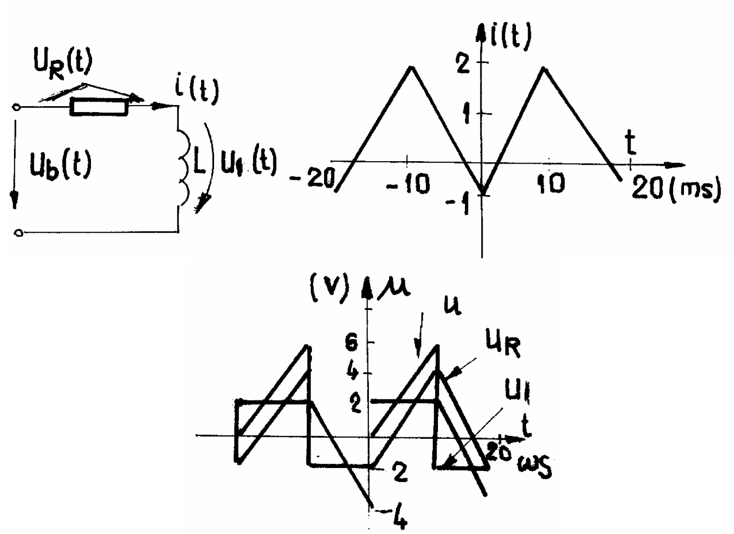

Fig. 8.3

Rezolvare: Tensiunea la borne are expresia:

$$u_b(t) = u_R(t) + u_L(t) = Ri + L \cdot \frac{di}{dt}, \text{unde}:$$

$$i(t) = \begin{cases} 300\ t - 1 & 0 \langle t \langle 0{,}01 \\ 5 - 300\,t & 0{,}010 \langle t \langle 0{,}02 \end{cases}$$

Componenta u_R urmareste forma de unda a curentului:

$u_R = R \cdot i = 2i$, iar pentru componenta U_L se obtine:

$$u_L = L \cdot \frac{di}{dt} = \begin{cases} 2 & 0 \langle t \langle 0{,}01 \\ -2 & 0{,}01 \ \langle t \langle 0{,}02 \end{cases}$$

Prin adunarea ordonatelor curbelor u_R si u_L(vezi fig.8.23.c) se obtine variatia in timp a tensiunii la borne:

$$U_b(t) = \begin{cases} 600\,t & 0 \langle t \langle 0{,}01 \\ 8 - 600\,t & 0{,}01 \langle t \langle 0{,}02 \end{cases}$$

8.4. (R) Circuitul serie R-L e alimentat de la un generator de t.e.m., $u_e = U_0 + U_1 \cdot \sin\omega t$ (fig.8.4). Curentul prin circuit si caderile de tensiune la bornele rezistorului si bobinei sunt masurate cu aparate de tip magnetoelectric si apoi electromagnetic. Sa se determine indicatiile aparatelor in cele doua cazuri si sa se specifice daca doua din aceste indicatii sunt suficiente pentru calculul puterii activate.

Aplicatie numerica: R=3 Ω; ωL=4 Ω; U_0=18 V; U_1=40 V.

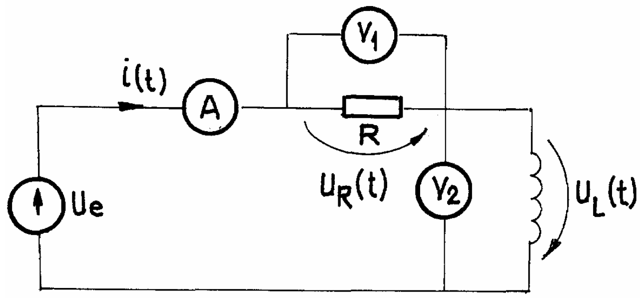

Fig. 8.4

Rezolvare: Intensitatea curentului prin circuit are expresia:

$$i = \frac{U_0}{R} + \frac{U_1}{Z} \cdot \sin(\omega t - \varphi)$$, unde:

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = 5\Omega$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\omega L}{R} = 53^0$$

Rezulta pentru caderile de tensiune solutiile:

$$u_R = R \cdot i = U_0 + U_1 \cdot \frac{R}{Z} \cdot \sin(\omega t - \varphi)$$

$$u_L = L \cdot \frac{di}{dt} = U_1 \cdot \frac{\omega L}{Z} \cdot \cos(\omega t - \varphi)$$

Numeric:

$i=6+8\cdot\sin(\omega t-53^0)$

$u_R=18+24\cdot\sin(\omega t-53^0)$

$u_L=32\cdot\cos(\omega t-53^0)$

Valorile medii indicate de aparatele magnetoelectrice si valorile efective indicate de aparatele electromagnetice se scriu fara dificultate. Se obtine:

$$I_0 = 6A;\ U_{R_0} = 18V;\ U_{L_0} = 0$$

$$I = \sqrt{6^2 + (8/\sqrt{2})^2} = 8{,}25A$$

$U_R=R\ I=24{,}75$ V; $U_L = \frac{32}{\sqrt{2}} = 22{,}7$ V

Puterea activa este data de una din urmatoarele expresii:

$P=R\cdot I^2=3\cdot 68=204$ W sau

$P=U_0\cdot I_0+1/2\cdot U_1\cdot I_1\cdot\cos\varphi=6{,}18+1/2\cdot 40\cdot 8\cdot\cos 53^0=108+96=204$ W

$$P = \frac{U_{R_0}}{I_0} \cdot I^2 = U_R \cdot I$$

Ultimele expresii arata ca pentru masurarea puterii active sunt suficiente masurarile de curent cu ampermetrul magnetoelectric si electromagnetic si masurarea tensiunii la bornele rezistorului cu voltmetrul magnetoelectric, sau numai masurarile de curent si tensiune la bornele rezistorului cu aparatele electromagnetice.

8.5. (R) Un circuit serie R-L având rezistenta R=8Ω si reactanta X=ωL=6 Ω este alimentat cu tensiunea sinusoidala la borne $u = 220 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin \omega t$. Daca bobina circuitului presupusa fara fier se inlocuieste cu o bobina cu fier, in asa fel incât rezistenta circuitului serie sa ramâna aceeasi, se constata ca circuitul este strabatut de un curent electric nesinusoidal de forma:

$$i = 20 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t - \varphi) + \sum_{K=2}^{\infty} I_k \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(k\omega t - \varphi_k)$$

cu $\left(\sum_{K=2}^{\infty} I_K^2 \right)^{1/2} = 9A$

Pentru cele doua situatii sa se determine:

a) valoarea efectiva a curentului absorbit;

b) puterea aparenta, puterea activa, reactiva si deformanta;

c) factorul de putere.

Rezolvare: Valoarea efectiva a curentului pentru prima situatie este:

$$I = U / \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = 220 / \sqrt{8^2 + 6^2} = 22A$$

Pentru a doua situatie, care corespunde unui regim permanent nesinusoidal, se cunoaste valoarea efectiva a primei armonice si reziduul deformant.

$$I_d = \left(\sum_{K=2}^{\infty} I_k^2 \right)^{1/2} = 9A$$

In consecinta, valoarea efectiva a curentului este:

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_d^2} = \sqrt{20^2 + 9^2} = 22A$$

(aceeasi cu cea corespunzatoare primei situatii, de regim permanent sinusoidal).

Puterile aparente S=U·I=220·22=4840 VA sunt atunci aceleasi pentru cele doua regimuri. Deoarece rezistenta circuitului se mentine aceeasi pentru cele doua situatii, puterile active au aceeasi valoare: $P=R \cdot I^2=8 \cdot 22^2=3.872$ W, iar factorul de putere nu-si schimba valoarea.

Luând in considerare aceste caracteristici, cele doua regimuri, cel permanent sinusoidal, corespunzator primei situatii si cel permanent nesinusoidal, corespunzator celei de a doua situatii, apar identice. Este evident totusi ca, daca in prima situatie factorul de putere poate ajunge unitar prin montarea unei baterii de condensatoare (de X_c=-6Ω) in cea de a doua situatie factorul de putere nu poate fi complet compensat, deoarece puterea deformanta

$D=U \cdot I_d=220 \cdot 9=1.980$ VAD este nenula.

Puterile reactive sunt:

$Q=U \cdot I \cdot \sin\varphi=2.904$ VAR si respectiv:

$$Q = \left[S^2 - \left(P^2 + D^2\right)\right]^{1/2} = 2.120 \text{ VAR}$$

8.6. (R) Un observator examineaza functionarea a doua circuite:

a) primul e format dintr-o bobina fara fier, cu rezistenta R=64Ω si reactanta X=48Ω, careia i se aplica o tensiune sinusoidala de valoare efectiva U=400 V, f=50 Hz;

b) al doilea e format dintr-o rezistenta R′=100Ω in paralel cu un condensator de capacitate C′=20,89μF conectat la o sursa de tensiune nesinusoidala.

$$u' = \frac{400}{\sqrt{1{,}04}} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin \omega t + \frac{80}{\sqrt{1{,}04}} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin 3\omega t$$

Sa se determine analogiile si diferentele constatate intre circuite in ceea ce priveste: valorile efective ale tensiunii si curentului; puterea aparenta, puterea activa, factorul de putere si puterea deformanta.

Rezolvare: Se obtin rezultate identice pentru:

– valoarea efectiva a tensiunii:

a) U=400 V; $U' = \sqrt{U_1^2 + U_3^2} = 400V$

– valoarea efectiva a curentului total:

a) $I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X^2}} = 5A$; b) $I' = \sqrt{I_1^2 + I_3^2} = 5A$

unde:

$$I_1 = U_1 \cdot \sqrt{\frac{1}{R'^2} + (\omega C')^2}$$

$$I_3 = U_3 \cdot \sqrt{\frac{1}{R'^2} + (3\omega C')^2}$$

– puterea aparenta:

a) $S=U \cdot I=400 \cdot 5=2.000$ VA;

b) $S'=U' \cdot I=400 \cdot 5=2000$ VA

– puterea activa:

a) $P=R \cdot I^2=64 \cdot 5^2=1.600$ W;

b) $P' = R' \cdot \left[(\frac{U_1}{R'})^2 + (\frac{U_3}{R'})^2 \right] = 1.600$ W

– factorul de putere:

a) $k = \frac{P}{S} = \frac{1600}{2000} = 0{,}8$;

b) $k' = \frac{P'}{S'} = \frac{1600}{2000} = 0{,}8$

Se obtin rezultate diferite pentru:

– puterea reactiva:

a) $Q=X \cdot I^2=48 \cdot 5^2=1200$ VAR

b) $Q' = -C \cdot \omega \cdot U_1^2 = -3 \cdot \omega C \cdot U_3^2 = -1130{,}23$ VAR

– puterea deformanta:

a) D=0

b) $D=U_1 \cdot I_3-U_3 \cdot I_1=-403{,}66$ VAR

Concluzii: Pentru circuitul a), factorul de putere poate fi compensat total prin montarea unui condensator. Pentru circuitul b), factorul de putere poate fi imbunatatit prin montarea unei bobine, dar compensarea nu poate fi completa, deoarece $D \neq 0$.

8.7. Sa se calculeze puterea activa, puterea reactiva, puterea aparenta si puterea deformanta pentru:

a) bobina din problema 8.1.;

b) condensatorul din problema 8.2.

R: a) P=0; Q=103,2 VAR; S=105,5 VA; D=2,15 VAD
b) P=0; Q=132 VAR; S=150,7 VA; D=71,3 VAD.

8.8. La bornele circuitului din fig.8.8 in care R=10Ω L=11,77 mH si C=23,98μF se aplica o tensiune nesinusoidala:

$$u = 30\cdot\sqrt{2}\cdot\sin\omega t + 10\cdot\sqrt{2}\cdot\sin 3\omega t \text{ V}$$

Care este frecventa armonicii fundamentale a tensiunii, daca amplitudinea armonicei a treia a curentului in circuit este de doua ori mai mare decât amplitudinea fundamentalei acestuia?

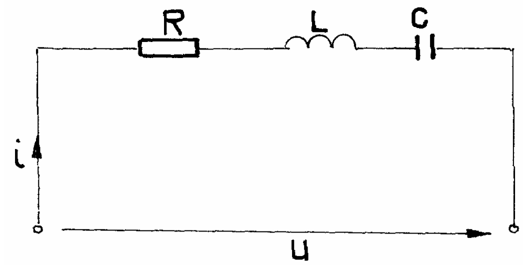

Fig. 8.8

R: f=100 Hz

8.9. Pentru circuitul din problema precedenta sa se calculeze valoarea eficace a curentului, puterea activa, puterea reactiva, puterea aparenta si puterea deformanta. Frecventa primei armonice a tensiunii u este 100 Hz.
R: I=1,12 A; P=12,5 W; Q=-14,8 VAR; S=35,4 VA; D=29,6 VAD.

8.10. Sa se calculeze curentii i, i_L si i_C in laturile circuitului din fig.8.10, in care $R=R_L=R_C=10\Omega$; $\omega L=5\Omega$; $1/\omega C=20\Omega$ iar t.e.m. a sursei este:

$$e = 120\cdot\sqrt{2}\cdot\sin\omega t + 10\cdot\sqrt{2}\cdot\sin\left(3\omega t - 30^0\right) + 30\cdot\sqrt{2}\cdot\sin\left(5\omega t - 135^0\right)\text{V}$$

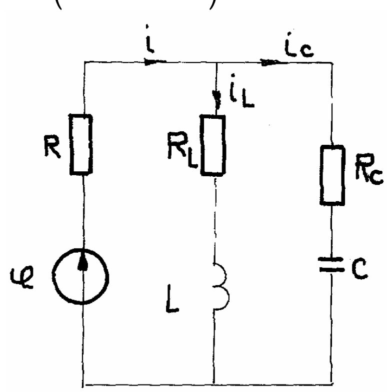

Fig. 8.10

R: $i = 8\cdot\sqrt{2}\cdot\sin\omega t + 0{,}5\cdot\sqrt{2}\cdot\sin\left(3\omega t - 30^0\right) + 1{,}5\cdot\sqrt{2}\cdot\sin\left(5\omega t - 135^0\right)$ A;

$$i_L = 53{,}6\cdot\sqrt{2}\cdot\sin\left(\omega t - 26^0 34'\right) + 0{,}277\cdot\sqrt{2}\cdot\sin\left(3\omega t - 86^0 20'\right) + $$
$$+ 0{,}577\cdot\sqrt{2}\cdot\sin\left(5\omega t + 156^0 50'\right) \text{ A;}$$
$$i_C = 2{,}68\cdot\sqrt{2}\cdot\sin\left(\omega t + 63^0 25'\right) + 0{,}416\cdot\sqrt{2}\cdot\sin\left(3\omega t + 3^0 43'\right) + $$
$$+ 1{,}39\cdot\sqrt{2}\cdot\sin\left(5\omega t - 113^0 10'\right) \text{ A}$$

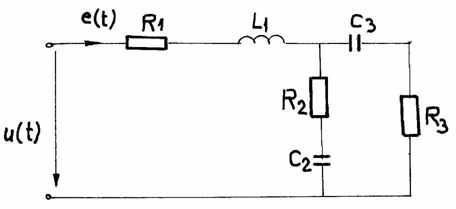

Fig. 8.11

8.11. Se da circuitul din fig.8.11. Tensiunea de la intrare, nesinusoidala, contine armonica a cincea in proportie de 50%. Daca U_1=141,4V; $R_1=R_2=\omega L_1=1/\omega C_3=10\Omega$; $R_3=20\Omega$; $1/\omega C_2=30\Omega$, sa se determine valoarea instantanee a curentului si puterile absorbante.

R: $i = 10 \cdot \sin \omega t + 2{,}16 \cdot \sin\left(5\omega t - 68^0 30'\right)$ A;

P=1040 W; Q= -1000 VAR; S=1144 VA.