Lucrarea nr. 1

PRELEVAREA SI PRELUCRAREA DATELOR DE MASURARE

1. GENERALITATI

In electrotehnică şi electronică intervin numeroase mărimi fizice ca: tensiune, curent, rezistenţă, energie, etc., care se caracterizează prin *mărime* şi prin anumite *raporturi* între ele. Aprecierea cantitativă a proprietăţilor acestor mărimi se realizează prin operaţia de *măsurare*.

A măsura o mărime înseamnă a o compara cu altă mărime, de obicei de aceeaşi natură, luată convenţional ca referinţă, care determină şi unitatea de măsură. Operaţia de măsurare se exprimă matematic prin formula:

$$X = n \times U \qquad (1.1)$$

unde: - X = mărimea de măsurat;

- n = valoarea numerică a mărimii de măsurat;
- U = unitatea de măsură.

Orice proces de măsurare conţine 4 elemente principale:

- măsurandul (mărimea de măsurat);
- metoda de măsurare;
- aparatul de măsurare;
- etalonul;

O proprietate măsurabilă a unui obiect este numită *mărime*, iar o condiţie de măsurabilitate este ca mărimea fizică să constituie o mărime ordonabilă. In plus este necesar să se poată stabili convenţional o corespondenţă biunivocă între mulţimea valorilor mărimii şi mulţimea numerelor reale: *convenţia de scară* (defineşte şi unitatea de măsură). Rezultatul final al oricărei măsurări este un *număr*, care împreună cu unitatea de măsură caracterizează mărimea de măsurat. Mărimile măsurabile în electrotehnică sunt de 3 tipuri:

- *mărimi constante*, pentru care valoarea instantanee este aceeaşi indiferent de momentul şi durata măsurării (T_m). T_m este limitat în acest caz doar de nivelul perturbaţiilor, de timpul de răspuns al aparatului şi bineînţeles de timpul de transmitere a informaţiei de măsurare spre utilizator.

- *mărimi variabile staţionare,* pentru care se pot măsura valori instantanee, ansamblul valorilor instantanee într-un anumit interval de timp sau un parametru global cum ar fi:

- *valoarea medie* $X_{med} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} x(t) \cdot dt \qquad (1.2)$

- *valoarea efectivă* $X = \sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\cdot dt}$ (1.3)

- *valoarea de vârf* $x_m = \max_{t_1}^{t_2} |x(t)|$ (1.4)

Intervalul de timp t_2-t_1 se alege astfel încât parametrul global să rezulte independent de timp.

- *mărimi variabile nestaţionar*, caz în care interesează parametri ca:

- valoarea instantanee la un anumit moment sau un şir de valori instantanee la anumite momente de timp;

- valoarea medie pe un interval de timp [t_1, t_2];

- ansamblul valorilor instantanee într-un interval de timp.

In cazul acestor mărimi parametrii globali depind de intervalul de timp în care se măsoară.

2. SURSE DE ERORI. CLASIFICAREA ERORILOR

Intr-o măsurare de orice natură, oricât de corect ar fi executată, chiar dacă sunt utilizate cele mai precise metode şi aparate, rezultatul diferă de valoarea reală, (convenţional) adevărată.
Diferenţa rezultatului obţinut prin măsurarea mărimii şi valoarea sa reală: $\Delta x = x_m - x$ (2.1), unde x_m este rezultatul măsurării, iar x este valoarea adevărată a mărimii fizice măsurate, poartă numele de *eroare de măsurare*. Prin intermediul erorii de măsurare se defineşte *precizia*, care constituie un indicator principal al calităţii măsurării. In general erorile se datorează mai multor cauze:

- obiectului supus măsurării **-** *erori de model*. Se datorează idealizării sistemului fizic asupra căruia se efectuează măsurarea. Prin aceasta se neglijează unele proprietăţi sau mărimi fizice caracteristice acestuia. Tot aici se încadrează şi cele datorate instabilităţii în timp a mărimii fizice măsurate. Instabilitatea poate fi o variaţie monotonă (derivă), variaţie ciclică sau neregulată;

- aparatului de măsurare **-** *erori instrumentale*. Pot fi deseori cele mai importante. Acestea sunt de regulă cunoscute dacă aparatul este folosit corect;

- interacţiunii aparat - obiect **-** *erori de interacţiune*. Acestea sunt provocate de aparat asupra obiectului de măsură (electromagnetic sau mecanic) sau reciproc (datorită puterii absorbite de aparat, injecţiei de curenţi sau tensiuni parazite, perturbaţiei câmpului datorită traductorului).

- influenţei exterioare **-** *erori de influenţa*. Sunt o consecinţă a factorilor de mediu, a câmpurilor perturbatoare sau datorate prezenţei operatorului.

2.1. Erori sistematice, erori aleatoare, erori grosolane

Mărimile de influenţă rapid variabile în timp, luând în timpul unor măsurări repetate diferite valori, dau naştere erorilor aleatoare, iar cele lent variabile, având aceleaşi valori în timpul măsurărilor repetate, dau naştere erorilor sistematice. Cu toate acestea erorile nu pot fi împărţite în mod univoc în erori sistematice şi aleatoare. Departajarea lor în 2 categorii distincte depinde de durata totală a măsurărilor. De exemplu, dacă măsurarea se repetă la intervale mari eroarea sistematică poate deveni aleatoare. Pot exista mărimi de influenţă a căror perioadă este comparabilă cu cea a măsurărilor, acestea dând naştere la erori care nu sunt nici sistematice nici aleatoare.

Diferenţa apare doar prin aceea că erorile aleatoare pot fi puse în evidenţă prin repetarea măsurării, pe când cele sistematice sunt nedeterminabile prin experimentul în sine, evaluarea lor necesitând informaţii suplimentare.

Calitatea unei măsurări de a fi neafectată de erori se numeşte *precizie*. Neafectarea cu erori sistematice se numeşte *justeţe*, iar neafectarea cu erori aleatoare se numeşte *repetabilitate (fidelitate)*:

$$\frac{PRECIZIE}{eroare}\begin{cases}\dfrac{JUSTETE}{eroare\ \ sistematica}\\[2ex]\dfrac{REPETABILITATE}{eroare\ \ aleatoare}\end{cases}$$

Erorile grosolane (greşeli) se caracterizează prin valori foarte mari, şi au probabilitate mică de apariţie.

2.2. Erori absolute şi relative. Eroarea maxim admisibilă

Un alt criteriu de clasificare al erorilor este după modul lor de exprimare.

Eroarea absolută se defineşte ca fiind diferenţa valorii mărimii măsurate şi valorii mărimii reale (adevărate), $\Delta X = X - Xe$ (2.2). Eroarea absolută cu semn schimbat se numeşte *corecţie*.

Eroarea relativă este un raport dintre eroarea absolută şi valoarea adevărată sau cea de referinţă:

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta X}{Xe} \cong \frac{\Delta X}{X} \qquad (2.3)$$

Eroarea raportată este similară cu (2.3) cu diferenţa că valoarea adevărată se înlocuieşte cu valoarea de referinţă:

$$\varepsilon_R = \frac{\Delta X}{Xc} \qquad (2.4)$$

Dacă într-un şir de măsurări, din cauze aleatoare se obţin diferite valori x_{mi} ale mărimii de măsurat, se determină erorile Δx_i cu relaţia (2.2), după care se reţine cea mai mare valoare Δx_i:

$$\Delta x_{ad} = \Delta x_{\max} = \max_{i=1}^{n} \Delta x_i \qquad (2.5)$$

care se numeşte *eroare maxim admisibilă*.

3. PRECIZIA INSTRUMENTALA. CLASE DE PRECIZIE

Orice aparat de măsurare este caracterizat prin *precizia instrumentală*, calitate a aparatului de a da rezultate cât mai apropiate de valoarea adevărată a măsurandului. Cantitativ, precizia instrumentală este descrisă de *eroarea instrumentală*. Aceasta include atât eroarea sistematică cât şi pe cea aleatoare. Pentru normarea erorilor tolerate (admisibile) ale aparatului de măsurare, erorile instrumentale se împart în erori de bază (erori intrinseci) şi erori suplimentare (erori de influenţă).

Erorile de bază sunt erorile în condiţii de referinţă (adică în condiţii de mediu bine stabilite), prescrise prin standarde şi norme.

Erorile suplimentare sunt cele provocate de variaţia mărimilor de influenţă (ale mediului). Acestea sunt prescrise pentru variaţia fiecărei mărimi de influenţă separat, în intervalele nominale ale acestora. Există şi o altă modalitate de prescriere a unor erori de funcţionare care să nu fie depăşite în întregul interval de variaţie al tuturor mărimilor de influenţă, oricare ar fi combinaţia lor.

Erorile tolerate ale aparatului de măsurare se exprimă într-una din următoarele forme:

a) *Eroarea absolută*. Este folosită rar pentru caracterizarea aparatelor de măsurare pentru mărimi electrice. Se mai întâlneşte la unele aparate pentru măsurarea mărimilor neelectrice şi la etaloane. Ea se exprimă sub forma:

$$e = \pm a \quad (3.1)$$

unde e = eroarea absolută tolerată, a = mărime constantă exprimată prin aceleaşi unităţi de măsură ca şi măsurandul.

b) *Eroarea relativă*. Este cea mai folosită când eroarea absolută a aparatului este aproximativ proporţională cu valoarea măsurandului şi este de dorit ca eroarea tolerată să fie exprimată printr-un număr care să rămână constant în tot intervalul de măsurare al aparatului. Eroarea relativă tolerată se normează sub forma:

$$e_r = \pm \frac{100 \cdot |e|}{x}\ [\%] = \pm b\,\% \qquad (3.2), \text{ unde:}$$

e_r = eroarea relativă tolerată

x = valoarea măsurandului

$|e|$ = modulul erorii absolute tolerate

b = număr adimensional pozitiv.

c) *Eroare raportată* (procente din valoarea convenţională). Se foloseşte când eroarea absolută a aparatului este constantă în intervalul de măsurare şi este de dorit ca eroarea tolerată să fie exprimată printr-un număr care să rămână constant pentru o categorie de aparate similare, dar cu limite de măsurare diferite. Acestea se aplică la marea majoritate a aparatelor electrice indicatoare. Ele se normează ca mai jos:

$$e_R = \pm \frac{100 \cdot |e|}{X_C}\ [\%] = \pm p\ [\%] \qquad (3.3), \text{ unde:}$$

e_R =eroarea raportată tolerată, $|e|$=modulul erorii absolute tolerate, X_C =valoarea convenţională, p =număr adimensional pozitiv.

Valoarea convenţională X_C poate fi:

- limita superioară de măsurare (la aparatele cu scară liniară ce au reperul zero la extremitatea scării sau în afara ei);

- cea mai mare limită de măsurare sau suma modulelor limitelor de măsurare (la aparatele cu reperul zero în interiorul scării);

- valoarea nominală a măsurandului (la aparatele la care este fixată o valoare nominală);

- lungimea scării gradate (la aparatele cu scară neliniară, cu |e| exprimată în aceleaşi unităţi de măsură ca şi lungimea scării gradate).

d) *Combinaţii de erori relative şi raportate*. Se folosesc atunci când eroarea absolută a aparatului are o componentă independentă de valoarea măsurandului (eroare de zero) şi o componentă proporţională cu aceasta (eroare de proporţionalitate). Acest tip de eroare se utilizează la punţi, compensatoare, voltmetre diferenţiale, impedanţmetre, multimetre digitale. Ea se exprimă sub formă de eroare relativă:

$$e_r = \pm\left(b + c \cdot \frac{Xm}{x} \right) [\%] \quad (3.4)$$

sau sub formă de eroare absolută:

$$e = \pm (b \cdot x + c \cdot Xm) \qquad (3.5), \text{ unde:}$$

e_r = eroare relativă tolerată, e = eroare absolută tolerată, x = valoarea măsurandului, x_m = limita superioară a gamei de măsurare, b, c= numere adimensionale pozitive.

Factorii b şi c sunt numiţi impropriu eroare de citire şi eroare din capăt de scară. Uneori eroarea tolerată se exprimă şi sub forma:

$e = \pm b\% \pm \Delta x$ (3.6) sau $e = \pm b\% \pm n\ digiti$ (3.7), unde Δx=const.

In figura următoare sunt reprezentate diferite moduri de exprimare ale erorilor tolerate.

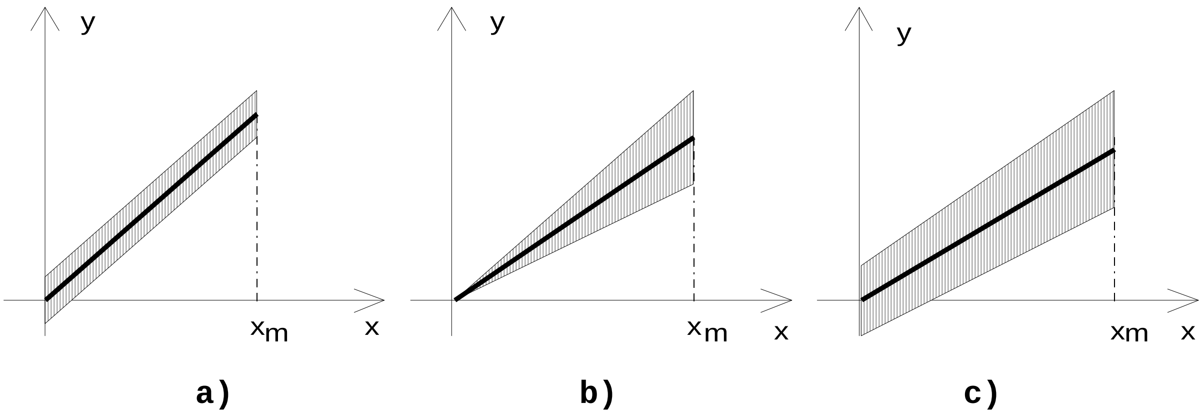


Figura 1. a) eroare raportată constantă **b)** eroare relativă constantă **c)** combinaţie de eroare raportată şi relativă constante.

Clasa de precizie reflectă un anumit ansamblu de proprietăţi metrologice ale aparatelor, dar nu reprezintă în mod necesar precizia măsurării făcute cu acel aparat. Valorile standardizate ale clasei de precizie sunt: 0,001; 0,002; 0,005; 0,01; 0,02; 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1; 2; 5.

In Tabelul 1 sunt date exemple de desemnare şi exprimare ale clasei de precizie:

Tabelul 1

Modul de exprimare	Eroarea toleratã	Indice de clasã
Eroare relativã	$e_r = \pm b\%$	b
Eroare raportatã	$e_R = \pm p\%$	p
Eroare raportatã la lungimea scãrii	$e_R = \pm p\%$	p
Combinatie de er. relativã si raportatã	$e_r = [b' + c(\frac{X_m}{x} - 1)]$	b b'/c

Observaţie: clasa de precizie nu dă direct eroarea de măsurare a aparatului. In general, eroarea absolută este constantă, dar eroarea relativă, care interesează în majoritatea cazurilor, creşte pe măsura apropierii de capătul de jos al scării de măsurare: $\varepsilon_r = \frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta x}{Xc} \cdot \frac{Xc}{x} = \varepsilon_R \cdot \frac{Xc}{x}$ (3.8).

4. PRELEVAREA DATELOR EXPERIMENTALE

In funcţie de precizia măsurării avem:

- măsurări uzuale;
- măsurări de precizie: - de verificare şi calibrare;
  - pentru determinarea unor constante.

Prelevarea datelor în cadrul unei măsurări se face în primul rând în funcţie de precizia impusă măsurării şi apoi în funcţie de modul de variaţie al semnalului în timp.

4.1. Măsurări uzuale

Măsurările uzuale se efectuează în cazul în care se doreşte obţinerea promptă a rezultatului măsurării. In acest caz nu se impune o precizie ridicată şi nu se estimează erorile. Ele se efectuează chiar în mediul de desfăşurare a unui proces tehnologic utilizând o aparatură mai puţin sensibilă dar robustă şi aplicând metode de deviaţie (cu citire directă) sau metode diferenţiale (asociaţie între cele cu citire directă şi cele de zero). Aparatul aflat la dispoziţie se consideră bun, se citeşte indicaţia acestuia, după ce în prealabil a fost comutat pe scara adecvată. Măsurarea se poate relua în scopul asigurării corectitudinii acesteia.

Măsurările uzuale se aplică în cazul unor componente înainte de introducerea lor în circuit, la măsurarea unor mărimi care intervin într-un proces tehnologic în scopul controlului şi al reglajului dacă se depăşesc anumite limite prestabilite sau la controlul şi reglajul unor circuite electronice.

In cazul în care erorile aleatoare sunt importante, datorate în principal fluctuaţiilor valorii măsurandului (măsurarea rezistenţei de contact, măsurarea rezistivităţii unui material neomogen), este necesar să se efectueze cel puţin 4-5 măsurări repetate după care se aplică metodologia de estimare a erorii aleatoare.

4.2. Măsurări de precizie

Măsurările de precizie se mai numesc şi măsurări de laborator. Pe lângă faptul că sunt caracterizate de o precizie ridicată, în cadrul acestor metode se estimează erorile şi se fac corecţii asupra valorilor mărimilor măsurate. Acestea se efectuează de obicei în camere speciale, climatizate, ecranate electromagnetic, utilizând aparatură de mare sensibilitate şi metode de comparaţie. Măsurările de laborator se utilizează în cercetarea ştiinţifică, la etalonarea şi verificarea mijloacelor de măsurare.

A. Măsurări de calibrare

Calibrarea constă în compararea unui aparat de măsurare cu un etalon, cu scopul de gradare sau ajustare a acestuia, verificare, sau etalonare.

Gradarea se face la fabricare, iar *ajustarea* se face după reparaţii sau în timpul exploatării pentru fixarea caracteristicii de transfer în limitele admise.

Verificarea aparatului de măsurat constă în constatarea încadrării erorilor acestuia în limitele erorilor tolerate, conform clasei sale de precizie. Ca rezultat al verificării, aparatul este admis sau respins.

Etalonarea aparatului de măsurare constă în determinarea corecţiilor (erori sistematice cu semn schimbat) în întregul domeniu de măsurare al aparatului. Rezultatul etalonării este consemnat într-un certificat de etalonare, în care se specifică toate corecţiile determinate.

B. Măsurări pentru determinarea unor constante

Aceste tipuri de măsurări sunt în general indirecte, folosind diferite funcţii de mai multe variabile:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad (4.1)$$

Indicaţiile x_i ale celor n aparate de măsurare se notează pentru un număr mare de măsurări (5-10). Ele vor fi folosite în analiza statistică pentru determinarea erorii şi la determinarea mărimii y.

5. PRELUCRAREA DATELOR SI PREZENTAREA REZULTATELOR

5.1. Măsurări uzuale

In cazul măsurărilor uzuale, cu erori sistematice predominante, incertitudinea aparatului de măsurare este hotărâtoare. Ea este specificată pentru fiecare aparat sub forma erorii limită tolerate. Rezultatul măsurării se dă sub forma: $x = \pm x_m \pm \varepsilon$ (5.1), unde:

x_m = valoarea măsurată, ε = incertitudinea corespunzătoare erorii limită, $\varepsilon = \max_{i=1}^{n} | x_m - x |$ (5.2)

In cazul măsurărilor uzuale cu erori aleatoare importante, după efectuarea celor 4 - 5 măsurări, se aplică metodologia de estimare a incertitudinii aleatoare folosind *metoda STUDENT*. Această metodă se aplică în cazul unui număr mic de măsurări (tipic n ≤ 20); dacă $n \to \infty$, repartiţia Student tinde spre repartiţia normală (Gauss).

Densitatea de repartiţie Student este de forma:

$$p(t)=\frac{1}{\sqrt{n\cdot\pi}}\cdot\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}\cdot\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \qquad (5.2)$$

unde n este numărul de măsurări, iar $\Gamma(n)$ - funcţia lui Euler.

Integrând *p(t)* de la -∞ la *t* obţinem *funcţia de repartiţie* Student:

$$F(t)=\int_{-\infty}^{t}p(u)\cdot du=\frac{1}{\sqrt{n\cdot\pi}}\cdot\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}\int_{-\infty}^{t}\left(1+\frac{u^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}\cdot du \qquad (5.3)$$

Variabila t se găseşte tabelată în funcţie de n şi P^*. Probabilitatea ca t să se afle în intervalul ($-t_i$, t_i) este: $P(-t_i,t_i)=\int_{-t_i}^{t_i}p(t)\cdot dt=2\Phi(t)$ (5.4), unde $\Phi(t)$ este integrala Student.

Eroarea maximă a unui rezultat dintr-un şir de măsurări este $\delta_{X\max}=\pm tS$ (5.5), iar abaterea mediei este $\delta_{\bar{x}}=\pm\frac{tS}{\sqrt{n}}$ (5.6), unde: $S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\delta_{x_i}^{2}}{n-1}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2}{n-1}}$ (5.7), S - estimaţia abaterii standard, iar $\overline{X}=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{n}$ (5.8) - estimaţia mediei.

In baza relaţiilor date, estimarea erorilor dată de *repartiţia Student* decurge astfel:

- se alege un nivel de încredere P^* de 0.9 sau 0.95
- se calculează estimaţia mediei rezultatelor individuale $\overline{X}$
- se calculează S
- se calculează $S_{\overline{X}}=\frac{S}{\sqrt{n}}$
- se determină, t în funcţie de P^* şi n
- se determină limitele de încredere δ_{Xmax} şi $\delta_{\overline{X}}$
- rezultatul se prezintă sub forma: $x=\overline{X}\pm\delta_{x_{\max}}$ sau $x=\overline{X}\pm\delta_{\overline{X}}$ cu specificarea nivelului de încredere asociat P^*.

5.2. Măsurări de precizie - verificări, etalonări

Datorită preciziei cerute, trebuie ţinut cont atât de prezenţa erorilor aleatoare cât şi a celor sistematice. In cazul în care una din cele două erori este predominantă, procedeul poate fi simplificat. Erorile sistematice se determină din datele de măsurare prin limitele ± a între care se apreciază că este situată eroarea. Pentru aceasta se folosesc date de catalog şi documentaţiile tehnice ale instrumentelor folosite (clasa de precizie, de ex.). Intrucât în interiorul acestor limite eroarea sistematică poate lua orice valoare, ea poate fi considerată echiprobabilă în acest domeniu. Aceasta este aşa-numita *distribuţie* *rectangulară* pentru care eroarea medie pătratică este dată de: $\sigma_{ech} = a/\sqrt{3}$ (5.9). Incertitudinea aleatoare echivalentă devine: $\varepsilon = \pm t\sigma$ (5.10), unde t se ia din tabel pentru valoarea aleasă P^* a nivelului de încredere şi $n \to \infty$ (metoda aleatorizării erorilor sistematice).

Pentru estimarea erorilor aleatoare se va folosi fie *metoda Student* ($n < 20$) sau *metoda Gauss* ($n > 20$).

Metoda Gauss presupune o densitate de probabilitate descrisă de o funcţie de forma:

$f(x,\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}}$ (5.11), unde μ şi σ sunt media şi dispersia date de relaţiile:

$\mu = M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \cdot dx$ (5.12) $\sigma^2 = D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(x))^2 \cdot f(x) \cdot dx$ (5.13)

Media şi dispersia pentru un set de n măsurări se determină astfel:

$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ (5.14), $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i}^2}{n}}$ (5.15), $\delta_{x_i} = x_i - \mu$ (5.16).

Prin translarea axelor şi raportare, obţinem distribuţia normală-normată *Laplace-Gauss*, descrisă de funcţia de variabilă z, $f(z,0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}$ (5.17). Probabilitatea ca valoarea să se situeze în interiorul intervalului simetric faţă de medie de lăţime $\pm z\sigma$ se calculează cu relaţia: $P(|x-\mu| \le z \cdot \sigma) = 2 \cdot \Phi(z_p)$ (5.18), unde $\Phi(z)$ este integrala *Laplace-Gauss*. Aceasta reprezintă gradul de încredere şi are valorile 68,26; 95,46; 99,73 pentru z egal cu 1, 2 şi respective 3.

Similar cu *repartiţia Student*, estimării erorilor prin metoda *Gauss* decurge astfel:

- se alege un nivel de încredere P de 0.95 sau 0.99 ($z = 2$ sau $z = 3$)
- se calculează valoarea medie $\mu = \overline{X}$, rel. (5.14)
- se calculează σ, rel. (5.15)
- se calculează eroarea maximă $\delta_{x_{max}} = \pm z \cdot \sigma$ (5.19)
- se calculează eroarea mediei $\delta_\mu = \pm \frac{z \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$ (5.20)
- rezultatul se prezintă sub forma: $x = \overline{X} \pm \delta_{x_{max}}$ sau $x = \overline{X} \pm \delta_\mu$, cu specificarea nivelului de încredere P asociat.

Compunerea celor două tipuri de erori este pătratică: $e = \pm\sqrt{\varepsilon^2 + \delta^2}$ (5.21)

In final rezultatul măsurării se dă sub forma: $x = \mu \pm e$ (5.22)

6. REPREZENTAREA GRAFICA A DATELOR EXPERIMENTALE

In general rezultatele măsurărilor constituie o mulţime dezordonată de valori. Pentru interpretarea comodă a acestora se preferă reprezentarea grafică sub formă de histogramă şi poligon de frecvenţe. Pentru aceasta intervalul de variaţie a rezultatelor se împarte în *intervale elementare* de aceeaşi lungime numite *intervale de grupare*. Lungimea lor se calculează cu formula lui Sturges:

$$d = \frac{x_{max} - x_{min}}{1 + 3{,}22 \cdot lg\, n} \qquad (6.1)$$

Numitorul se rotunjeşte la întregul cel mai apropiat.

- Se întocmeşte tabelul cu date primare:

Tabelul 2

Nr. crt.	X_i
1.	
2.	
... n.	

- se ordonează în sens crescător datele din tabelul precedent, şi pe baza formulei lui Sturges se stabilesc intervalele de grupare sau clasele;
- se calculează pentru fiecare interval de grupare valoarea centrală sau medie;
- se determină numărul de date, n_i, corespunzător unei clase. Numărul n_i se numeşte frecvenţă absolută;
- se calculează frecvenţa relativă: $f_i = \frac{n_i}{n}$ (6.2);
- rezultatele se trec în tabelul următor:

Tabelul 3

Intervale de clase	Valoare centrală	Frecvenţa absolută n_i	Frecvenţă relativă f_i
x_{min} - $(x_{min}+d)$			
$(x_{min}+d)$ - $(x_{min}+2d)$			
... $(x_{max} - d)$- x_{max}			

- Pentru histogramă se construiesc dreptunghiuri având baza egală cu intervalul de grupare iar înălţimea egală cu frecvenţa absolută sau relativă;
- Dacă se doreşte poligonul de frecvenţa se unesc prin segmente de dreaptă mijloacele laturilor superioare ale dreptunghiurilor histogramei.

Graficul va arăta ca în figura 2.

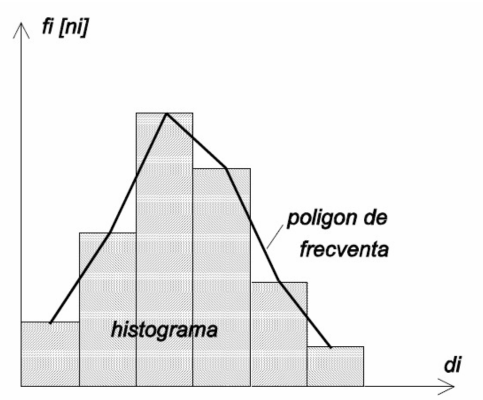


Figura 2

7. LUCRARI DE EFECTUAT IN LABORATOR

7.1. Se observă marcarea clasei de precizie pentru câteva etaloane şi aparate de măsurat electrice şi numerice (digitale). Se notează clasa de precizie aşa cum apare marcată, valoarea indicelui de clasă corespunzător, eroarea din care provine şi se calculează eroarea relativă procentuală.

7.2. Se verifică un voltmetru analogic de curent continuu prin comparaţie directă cu unul digital (metoda aparatului etalon). Datele se trec într-un tabelul adecvat, de ex. Tabelul 4, şi se prelucrează pentru a obţine încadrarea într-o clasă de precizie, $c_{\text{exp.}}$, ce poate fi diferită de cea marcată, c, atunci când aparatul verificat nu mai măsoară corect.

Tabelul 4

Nr. crt.	U_{V1} [V]	U_{V2} [V]	ΔU [V]	ε_r [%]	ε_R [%]	Observaţii
1		1				c = $c_{\text{exp.}}$ =
2		2				
3		3				
4		4				
5		5				
6		6				
7		7				
8		8				
9		9				
10		10				

Ştiind clasele de precizie, a aparatului etalon şi a aparatului verificat, se va aprecia corectitudinea verificării.

7.3. Se măsoară o rezistenţă de precizie prin metoda voltmetru-ampermetru. Pentru calculul erorilor se aplică atât metoda Student cât şi metoda Gauss pentru n = 20 măsurări.

7.4. Se construieşte histograma şi se apreciază dacă distribuţia rezultatelor se poate încadra în una cunoscută.

ANEXA 1

A. Tabelul A.1 - valorile parametrului *t* pentru distribuţia *Student*

\ P \ n \	0.683	0.900	0.950	0.955	0.990	0.997
2	1.83	6.31	12.71	13.97	63.66	-
3	1.32	2.92	4.30	4.53	9.92	19.21
4	1.20	2.35	3.18	3.31	5.84	9.22
5	1.14	2.13	2.78	2.87	4.60	6.62
6	1.11	2.02	2.57	2.65	4.03	5.51
7	1.09	1.94	2.45	2.52	3.71	4.90
8	1.08	1.90	2.36	2.43	3.50	4.53
9	1.07	1.86	2.31	2.38	3.36	4.28
10	1.06	1.83	2.26	2.33	3.25	4.09
11	1.05	1.81	2.23	2.30	3.17	3.96
12	1.05	1.79	2.20	2.27	3.11	3.86
13	1.04	1.78	2.18	2.24	3.05	3.77
14	1.04	1.77	2.16	2.22	3.01	3.71
15	1.04	1.76	2.14	2.20	2.98	3.64
16	1.03	1.75	2.13	2.18	2.95	3.59
17	1.03	1.74	2.12	2.17	2.92	3.54
18	1.03	1.74	2.11	2.16	2.90	3.51
19	1.03	1.73	2.10	2.15	2.88	3.48
20	1.03	1.73	2.09	2.14	2.86	3.45
∞	1.00	1.64	1.96	2.00	2.58	3.00

B. Valorile lui *z* pentru distribuţia *Gauss*

$z=1 \rightarrow P=0.6826$ pentru măsurări uzuale;

$z=2 \rightarrow P=0.9546$ pentru măsurări de laborator (verificări, etalonări);

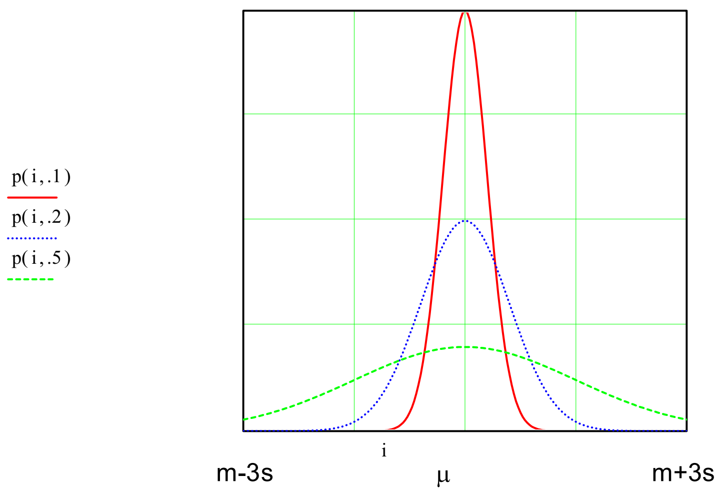
$z=3 \rightarrow P=0.9974$ pentru măsurări de precizie (determinări de constante).

DISTRIBUTIA GAUSS

$i := 4, 4.01 .. 6 \qquad \mu := 5 \qquad \sigma := 0 .. 1$

$$p(i,\sigma) := \frac{\exp\left[\frac{-(i-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}\right]}{\sigma\cdot\sqrt{2\cdot\pi}}$$

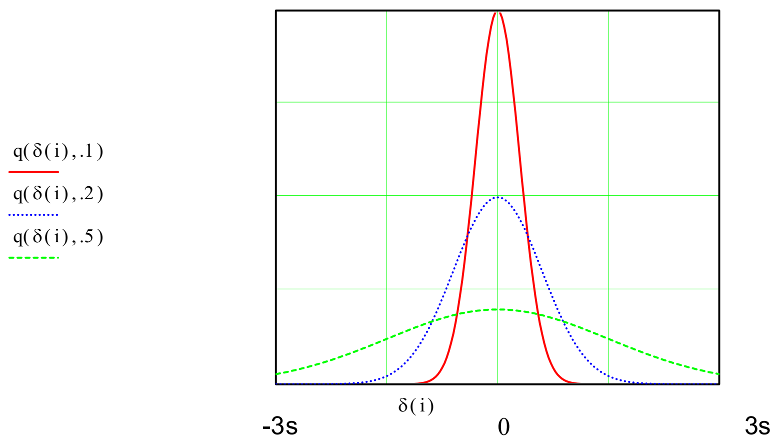
REZULTATE



$\delta(i) := i - \mu$

$$q(\delta,\sigma) := \frac{\exp\left(\frac{-\delta^2}{2\cdot\sigma^2}\right)}{\sigma\cdot\sqrt{2\cdot\pi}}$$

ERORI



DISTRIBUTIA STUDENT

a = valori ale functiei lui Euler pentru argument fractionar

b = valori ale functiei lui Euler pentru argument intreg

f1 = densitatea de probabilitate a repartitiei Student pentru n =1

f(t,n) = densitatea de probabilitate a repartitiei Student pt. n par

g(t) = densitatea de probabilitate a repartitiei Gauss

$$a_0 := \sqrt{\pi}$$

$$i := 1 .. 40 \qquad b_1 := 1 \qquad j := 2 .. 40$$

$$a_i := \left(i - \frac{1}{2}\right) \cdot a_{i-1}$$

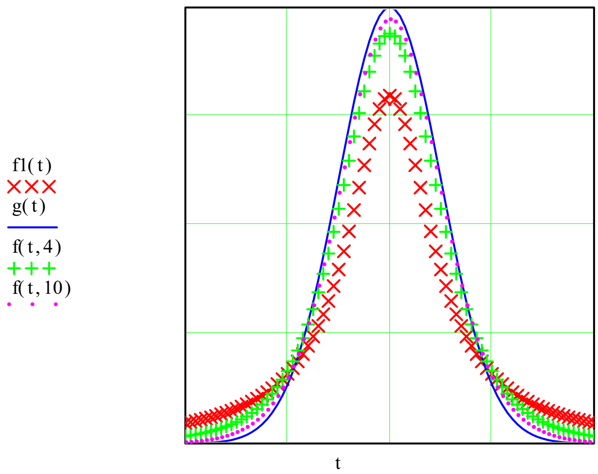
$$b_j := (j-1) \cdot b_{j-1}$$

$$f(t,n) := \left(\frac{1}{\sqrt{n \cdot \pi}}\right) \cdot \left[\frac{a_{\frac{n}{2}}}{b_{\frac{n}{2}}}\right] \cdot \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{-(n+1)}{2}}$$

$$t := -4, -3.9 .. 4$$

$$f1(t) := \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) \cdot \left(\frac{b_1}{a_0}\right) \cdot \left(1 + t^2\right)^{-1}$$

$$g(t) := \left(\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}}\right) \cdot \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right)$$



LEGENDA

- = Gauss; x = Student (n = 1); + = S (n = 4); . = S (n = 10)

DISTRIBUTIA X (hi) PATRAT

$n := 1, 4 .. 10$

$i := 2 .. 20$

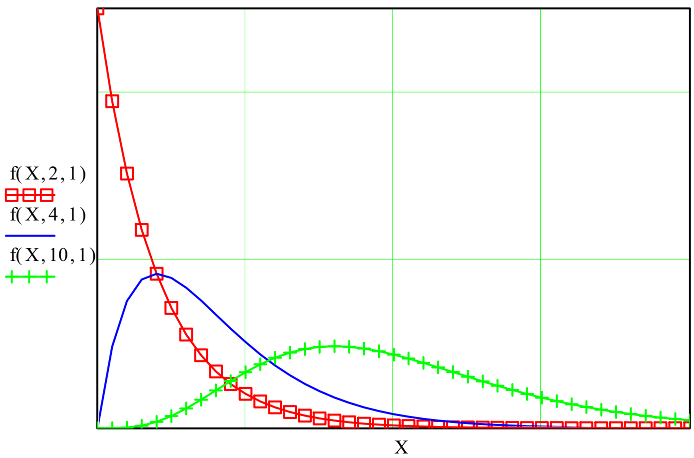
$\Gamma_1 := 1$

$X := 0, .5 .. 20$

$\Gamma_i := (i-1)\cdot\Gamma_{i-1}$

$\sigma := 1 .. 4$

$$f(X,n,\sigma) := \left(\frac{1}{\Gamma_{\frac{n}{2}}}\right)\cdot\frac{X^{\frac{n-2}{2}}}{\left(2\cdot\sigma^2\right)^{\frac{n}{2}}}\cdot\exp\left(\frac{-X}{2\cdot\sigma^2}\right)$$



LEGENDA

-O- = pentru n = 2; - = pentru n = 4; -+- = pentru n = 10