

Lucrarea nr. 1

PRELEVAREA SI PRELUCRAREA DATELOR DE MASURARE

1. GENERALITATI

În electronică intervin numeroase mărimi fizice (tensiune, curent, rezistență, energie, etc.) care prin *mărime* furnizează informații privind funcționarea unui circuit sau sistem. Aprecierea cantitativă a proprietăților acestor mărimi se realizează prin operația de *măsurare*.

A *măsura* o mărime înseamnă a o compara cu altă mărime, de obicei de aceeași natură, luată convențional ca referință, care determină și unitatea de măsură. Operația de măsurare se exprimă matematic prin formula:

$$X = n \times U \quad (1.1)$$

unde: - X = valoarea mărimii de măsurat;

- n = valoarea numerică a mărimii de măsurat;

- U = valoarea de referință (unitatea de măsură).

Orice proces de măsurare conține 4 elemente principale:

- măsurandul (mărimea de măsurat);
- metoda de măsurare;
- aparatul de măsurare;
- etalonul;

O proprietate măsurabilă a unui obiect este numită *mărime*, iar o condiție de măsurabilitate este ca mărimea fizică să constituie o mărime ordonabilă. În plus este necesar să se poată stabili convențional o corespondență biunivocă între mulțimea valorilor mărimii și mulțimea numerelor reale: *convenția de scară* (definește și unitatea de măsură). Rezultatul final al oricărei măsurări este un *număr*, care împreună cu unitatea de măsură caracterizează mărimea de măsurat. Mărimile măsurabile în electrotehnică sunt de 3 tipuri:

- *mărimi constante*, pentru care valoarea instantanee este aceeași indiferent de momentul și durata măsurării (T_m). T_m este limitat în acest caz doar de nivelul perturbațiilor, de timpul de răspuns al aparatului și bineînțeles de timpul de transmitere a informației de măsurare spre utilizator.

- *mărimi variabile staționare*, pentru care se pot măsura valori instantanee, ansamblul valorilor instantanee într-un anumit interval de timp sau un parametru global cum ar fi:

- *valoarea medie* $X_{med} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x(t) dt \quad (1.2)$

$$\text{- valoarea efectivă } X_{ef} = \sqrt{\frac{1}{t_2-t_1} \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt} \quad (1.3)$$

$$\text{- valoarea de vârf } x_{max} = \max_{t_1}^{t_2} |x(t)| \quad (1.4)$$

Intervalul de timp t_2-t_1 se alege astfel încât parametrul global să rezulte independent de timp.

- *mărimi variabile nestaționare*, caz în care interesează parametri ca:

- valoarea instantanee la un anumit moment sau un șir de valori instantanee la anumite momente de timp;

- valoarea medie pe un interval de timp $[t_1, t_2]$;

- ansamblul valorilor instantanee într-un interval de timp.

În cazul acestor mărimi parametrul global depinde de intervalul de timp în care se măsoară.

2. SURSE DE ERORI. CLASIFICAREA ERORILOR

Intr-o măsurare de orice natură, oricât de corect ar fi executată, chiar dacă sunt utilizate cele mai precise metode și aparate, rezultatul diferă de valoarea reală, (convențional) adevărată.

Diferența rezultatului obținut prin măsurarea mărimii și valoarea sa reală: $\Delta x = x_m - x$ (2.1), unde x_m este rezultatul măsurării, iar x este valoarea adevărată a mărimii fizice măsurate, poartă numele de *eroare de măsurare*. Prin intermediul erorii de măsurare se definește *precizia*, care constituie un indicator principal al calității măsurării. În general erorile se datorează mai multor cauze:

- obiectului supus măsurării - *erori de model*. Se datorează idealizării sistemului fizic asupra căruia se efectuează măsurarea. Prin aceasta se neglijează unele proprietăți sau mărimi fizice caracteristice acestuia. Tot aici se încadrează și cele datorate instabilității în timp a mărimii fizice măsurate. Instabilitatea poate fi o variație monotonă (derivă), variație ciclică sau neregulată;

- aparatului de măsurare - *erori instrumentale*. Pot fi deseori cele mai importante. Acestea sunt de regulă cunoscute dacă aparatul este folosit corect;

- interacțiunii aparat - obiect - *erori de interacțiune*. Acestea sunt provocate de aparat asupra obiectului de măsură (electromagnetic sau mecanic) sau reciproc (datorită puterii absorbite de aparat, injecției de curenți sau tensiuni parazite, perturbației câmpului datorită traductorului).

- influenței exterioare - *erori de influență*. Sunt o consecință a factorilor de mediu, a câmpurilor perturbatoare sau datorate prezenței operatorului.

2.1. Erori sistematice, erori aleatoare, erori grosolane

Mărimile de influență rapid variabile în timp, luând în timpul unor măsurări repetate diferite valori, dau naștere erorilor aleatoare, iar cele lent variabile, având aceleași valori în timpul măsurărilor repetate, dau naștere erorilor sistematice. Cu toate acestea erorile nu pot fi împărțite în mod univoc în erori sistematice și aleatoare. Departajarea lor în 2 categorii distincte depinde de durata totală a măsurărilor. De exemplu, dacă măsurarea se repetă la intervale mari eroarea sistematică poate deveni aleatoare. Pot exista mărimi de influență a căror perioadă este comparabilă cu cea a măsurărilor, acestea dând naștere la erori care nu sunt nici sistematice nici aleatoare.

Diferența apare doar prin aceea că erorile aleatoare pot fi puse în evidență prin repetarea măsurării, pe când cele sistematice sunt nedeterminabile prin experimentul în sine, evaluarea lor necesitând informații suplimentare.

Calitatea unei măsurări de a fi neafectată de erori se numește *precizie*. Neafectarea cu erori sistematice se numește *justețe*, iar neafectarea cu erori aleatoare se numește *repetabilitate (fidelitate)*:

$$\frac{PRECIZIE}{eroare} \left\{ \begin{array}{l} \frac{JUSTETE}{eroare sistematica} \\ \frac{REPETABILITATE}{eroare aleatoare} \end{array} \right.$$

Erorile grosolane (greșeli) se caracterizează prin valori foarte mari și au probabilitate mică de apariție.

2.2. Erori absolute și relative. Eroarea maxim admisibilă

Un alt criteriu de clasificare al erorilor este după modul lor de exprimare.

Eroarea absolută se definește ca fiind diferența valorii mărimii măsurate și valorii mărimii reale (adevărate) și se măsoară în aceleași unități de măsură ca și măsurandul. Eroarea absolută cu semn schimbat se numește *corecție*.

Eroarea relativă este un raport dintre eroarea absolută și valoarea adevărată sau cu valoarea măsurată. Se exprimă în procente.

Eroarea raportată este similară cu cea relativă, cu diferența că raportarea se face la o valoare de referință. Se exprimă în procente.

Combinății de erori relative și raportate. Reprezintă suma a 2 erori, una relativă și alta raportată. Se exprimă în procente

Dacă într-un șir de măsurări, din cauze aleatoare se obțin diferite valori x_{mi} ale mărimii de măsurat, se determină erorile individuale Δx_i , după care se reține cea mai mare valoare Δx_i , ca fiind *eroarea maxim admisibilă*.

3. PRECIZIA INSTRUMENTALA. CLASE DE PRECIZIE

Orice aparat de măsurare este caracterizat prin *precizia instrumentală*, calitate a aparatului de a da rezultate cât mai apropiate de valoarea adevărată a măsurandului. Cantitativ, precizia instrumentală este descrisă de *eroarea instrumentală*. Aceasta include atât eroarea sistematică cât și pe cea aleatoare. Pentru normarea erorilor tolerate (admisibile) ale aparatului de măsurare, erorile instrumentale se împart în erori de bază (erori intrinseci) și erori suplimentare (erori de influență).

Erorile de bază sunt erorile în condiții de referință (adică în condiții de mediu bine stabilite), prescrise prin standarde și norme.

Erorile suplimentare sunt cele provocate de variația mărimilor de influență (ale mediului). Acestea sunt prescrise pentru variația fiecărei mărimi de influență separat, în intervalele nominale ale acestora. Există și o altă modalitate de prescriere a unor erori de funcționare care să nu fie depășite în întregul interval de variație al tuturor mărimilor de influență, oricare ar fi combinația lor.

Erorile tolerate ale aparatului de măsurare se exprimă într-una din următoarele forme:

a) **Eroarea absolută**. Este folosită rar pentru caracterizarea aparatelor de măsurare pentru mărimi electrice. Se mai întâlnește la unele aparate pentru măsurarea mărimilor neelectrice și la etaloane. Ea se exprimă sub forma:

$$e = \pm a \quad (3.1)$$

unde e = eroarea absolută tolerată, a = mărime constantă exprimată prin aceleași unități de măsură ca și măsurandul.

b) **Eroarea relativă**. Este cea mai folosită când eroarea absolută a aparatului este aproximativ proporțională cu valoarea măsurandului și este de dorit ca eroarea tolerată să fie exprimată printr-un număr care să rămână constant în tot intervalul de măsurare al aparatului. Eroarea relativă tolerată se normalizează sub forma:

$$e_r = \pm \frac{|e|}{x} \cdot 100 [\%] \quad (3.2),$$

unde:

e_r = eroarea relativă tolerată

x = valoarea măsurandului

$|e|$ = modulul erorii absolute tolerate

b = număr adimensional pozitiv.

c) *Eroare raportată* (procente din valoarea convențională). Se folosește când eroarea absolută a aparatului este constantă în intervalul de măsurare și este de dorit ca eroarea tolerată să fie exprimată printr-un număr care să rămână constant pentru o categorie de aparate similare, dar cu limite de măsurare diferite. Acestea se aplică la marea majoritate a aparatelor electrice indicatoare. Ele se normează ca mai jos:

$$e_R = \pm \frac{|e|}{X_C} \cdot 100 [\%] = \pm p [\%] \quad (3.3),$$

unde:

e_R =eroarea raportată tolerată, $|e|$ =modulul erorii absolute tolerate, X_C =valoarea convențională, p =număr adimensional pozitiv.

Valoarea convențională X_C poate fi:

- limita superioară de măsurare (la aparatele cu scară liniară ce au reperul zero la extremitatea scării sau în afara ei);
- cea mai mare limită de măsurare sau suma modulelor limitelor de măsurare (la aparatele cu reperul zero în interiorul scării);
- valoarea nominală a măsurandului (la aparatele la care este fixată o valoare nominală);
- lungimea scării gradate (la aparatele cu scară neliniară, cu $|e|$ exprimată în aceleași unități de măsură ca și lungimea scării gradate).

d) *Combinății de erori relative și raportate*. Se folosesc atunci când eroarea absolută a aparatului are o componentă independentă de valoarea măsurandului (eroare de zero) și o componentă proporțională cu aceasta (eroare de proporționalitate). Acest tip de eroare se utilizează la punți, compensatoare, voltmetre diferențiale, impedanțmetre, multimetre digitale. Ea se exprimă sub formă de eroare relativă:

$$e_r = \pm \left(b + c \frac{X_m}{x} \right) [\%] \quad (3.4)$$

sau sub formă de eroare absolută:

$$e = \pm (b \cdot x + c \cdot X_m) \quad (3.5),$$

unde:

e_r = eroare relativă tolerată, e = eroare absolută tolerată, x = valoarea măsurandului, X_m = limita superioară a gamei de măsurare, b, c = numere adimensionale pozitive.

Factorii b și c sunt numiți impropriu eroare de citire și eroare din capăt de scară. Uneori eroarea tolerată se exprimă și sub forma:

$$e = \pm b\% \pm \Delta x \quad (3.6) \quad \text{sau} \quad e = \pm b\% \pm n \text{ digiti} \quad (3.7),$$

unde $\Delta x = \text{const.}$

În figura următoare sunt reprezentate diferite moduri de variație a erorii absolute.

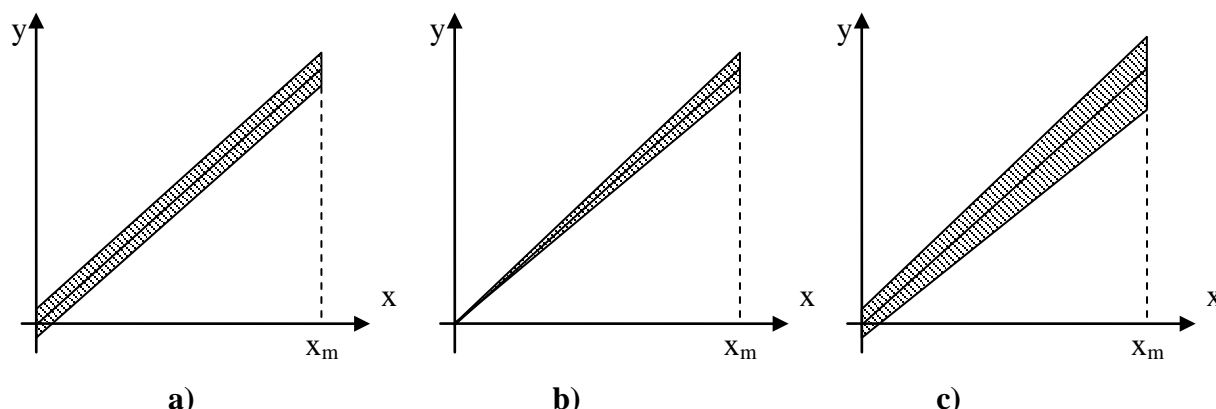


Figura 1. a) eroare absolută independentă de valoarea măsurandului (constantă) b) eroare absolută care depinde de valoarea măsurandului c) eroare absolută cu două componente, una independentă și alta dependentă de valoarea măsurandului.

Clasa de precizie reflectă un anumit ansamblu de proprietăți metrologice ale aparatelor, dar nu reprezintă în mod necesar precizia măsurării făcute cu acel aparat. Valorile standardizate ale clasei de precizie sunt: 0.001; 0.002; 0.005; 0.01; 0.02; 0.05; 0.1; 0.2; 0.5; 1; 2; 5.

În Tabelul 1 sunt date exemple de desemnare și exprimare ale clasei de precizie:

Tabelul 1

Modul de exprimare	Eroarea tolerată	Marcarea indicelui de clasă
Eroare relativă	$e_r = \pm b\%$	ⓑ
Eroare raportată	$e_R = \pm p\%$	p
Eroare raportată la lungimea scării	$e_R = \pm p\%$	p/
Combinăție de erori relative și raportate	$e_R = \pm \left[b' + c \left(\frac{x_m}{x} - 1 \right) \right] \%$	ⓑ b'/c

Observație: Clasa de precizie, în cazul erorii r raportate, nu dă direct eroarea de măsurare a aparatului. În general, eroarea absolută este constantă, dar eroarea relativă, care interesează în majoritatea cazurilor, crește pe măsura apropierii de capătul de jos al scării de măsurare:

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta X}{X} \cdot 100 = \frac{\Delta X}{X_C} \cdot \frac{X_C}{X} \cdot 100 = \varepsilon_R \cdot \frac{X_C}{X} \quad (3.8).$$

Exemplu: Determinarea erorii relative în urma măsurării unei tensiuni U , folosind un aparat de măsură având clasa de precizie $c=1$ (eroare raportată). Valoarea convențională a măsurandului este $U_C = 10V$.

Conform relației (3.8) eroarea relativă este $\varepsilon_r = c \cdot U_C / U$. Dacă valoarea mărimii măsurate U este 5V eroarea relativă este $\varepsilon_r = c \cdot U_C / U = 1 \cdot 10 / 5 = 2\%$. Dacă valoarea mărimii măsurate U este 8V eroarea relativă este $\varepsilon_r = c \cdot U_C / U = 1 \cdot 10 / 8 = 1.25\%$.

4. PRELEVAREA DATELOR EXPERIMENTALE

În funcție de precizia măsurării avem:

- măsurări uzuale;
- măsurări de precizie: - de verificare și calibrare;
- pentru determinarea unor constante.

Prelevarea datelor în cadrul unei măsurări se face în primul rând în funcție de precizia impusă măsurării și apoi în funcție de modul de variație al semnalului în timp.

4.1. Măsurări uzuale

Măsurările uzuale se efectuează în cazul în care se dorește obținerea imediată a rezultatului măsurării. În acest caz nu se impune o precizie ridicată și nu se estimează erorile. Ele se efectuează chiar în mediul de desfășurare a unui proces tehnologic utilizând o aparatură mai puțin sensibilă dar robustă și aplicând metode de deviație (cu citire directă) sau metode diferențiale (asociație între cele cu citire directă și cele de zero). Aparatul aflat la dispoziție se consideră bun, se citește indicația acestuia, după ce în prealabil a fost comutat pe scara adecvată. Măsurarea se poate relua în scopul asigurării corectitudinii acesteia.

Măsurările uzuale se aplică în cazul unor componente înainte de introducerea lor în circuit, la măsurarea unor mărimi care intervin într-un proces tehnologic în scopul controlului și al reglajului dacă se depășesc anumite limite prestabilite sau la controlul și reglajul unor circuite electronice.

În cazul în care erorile aleatoare sunt importante, datorate în principal fluctuațiilor valorii indicate (măsurarea rezistenței de contact, măsurarea rezistivității unui material neomogen), este necesar să se efectueze cel puțin 4-5 măsurări repetate după care se aplică metodologia de estimare a erorii aleatoare.

4.2. Măsurări de precizie

Măsurările de precizie se mai numesc și măsurări de laborator. Pe lângă faptul că sunt

caracterizate de o precizie ridicată, în cadrul acestor metode se estimează erorile și se fac corecții asupra valorilor mărimilor măsurate. Acestea se efectuează de obicei în camere speciale, climatizate, ecranate electromagnetic, utilizând aparatură de mare sensibilitate și metode de comparație. Măsurările de laborator se utilizează în cercetarea științifică, la etalonarea și verificarea mijloacelor de măsurare.

A. Măsurări de calibrare

Calibrarea constă în compararea unui aparat de măsurare cu un etalon, cu scopul de gradare sau ajustare a acestuia, verificare, sau etalonare.

Gradarea se face la fabricare, iar *ajustarea* se face după reparații sau în timpul exploatării pentru fixarea caracteristicii de transfer în limitele admise.

Verificarea aparatului de măsurat are ca scop constatarea încadrării erorilor acestuia în limitele erorilor tolerate, conform clasei sale de precizie. Ca rezultat al verificării, aparatul este admis sau respins.

Etalonarea aparatului de măsurare constă în determinarea corecțiilor (erori sistematice cu semn schimbat) în întregul domeniu de măsurare al aparatului. Rezultatul etalonării este consemnat într-un certificat de etalonare, în care se specifică toate corecțiile determinate.

B. Măsurări pentru determinarea unor constante

Aceste tipuri de măsurări sunt în general indirecte, folosind diferite funcții de mai multe variabile:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (4.1)$$

Indicațiile x_i ale celor n aparate de măsurare se notează pentru un număr mare de măsurări (5-10). Ele vor fi folosite în analiza statistică pentru determinarea erorii și la determinarea mărimii y .

5. PRELUCRAREA DATELOR SI PREZENTAREA REZULTATELOR

5.1. Măsurări uzuale

În cazul măsurărilor uzuale, cu erori sistematice predominante, incertitudinea aparatului de măsurare este hotărâtoare. Ea este specificată pentru fiecare aparat sub forma erorii limită tolerate. Rezultatul măsurării se dă sub forma: $x = \pm x_m \pm \varepsilon$ (5.1), unde:

x_m = valoarea măsurată, ε = incertitudinea corespunzătoare erorii limită, $\varepsilon = \max_i |x_m - x_i|$ (5.2)

În cazul măsurărilor uzuale cu erori aleatoare importante, după efectuarea celor 4 - 5 măsurări, se aplică metodologia de estimare a incertitudinii aleatoare folosind *metoda STUDENT*. Această metodă se aplică în cazul unui număr mic de măsurări (tipic $n \leq 20$); dacă $n \rightarrow \infty$, repartiția Student tinde spre repartiția normală (Gauss). Media unui număr redus de măsurări este ea însăși eroare aleatoare.

Densitatea de repartiție Student este de forma:

$$p(t) = \frac{1}{\sqrt{n \cdot \pi}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \quad (5.3)$$

unde n este numărul de măsurări, t este variabila aleatoare, iar $\Gamma(n)$ - funcția lui Euler.

Variabila t se găsește tabelată în funcție de n și P^* nivelul de încredere.

Probabilitatea ca t să se afle în intervalul $(-t_i, t_i)$ este:

$$P(-t_i, t_i) = \int_{-t_i}^{t_i} p(t) dt = 2\Phi(t) \quad (5.4),$$

unde $\Phi(t)$ este integrala Student. Pentru un număr de măsurări n ($x_i, i=1..n$) se poate calcula media celor n valori măsurate

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} \quad (5.5)$$

care este ea însăși o variabilă aleatoare.

Pentru fiecare valoare măsurată se poate calcula abaterea față de medie $\delta x_i = x_i - \bar{x}$, $i=1..n$.

Abaterea mediei este $\delta_{\bar{x}} = \pm \frac{tS}{\sqrt{n}}$ (5.6), abaterea maximă a unui rezultat dintr-un șir de

măsurări este $\delta_{x_{max}} = \pm tS$ (5.7), iar estimăția abaterii standard este $S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \delta_{x_i}^2}{n-1}} =$

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}{n-1}} \quad (5.8).$$

În baza relațiilor date, estimarea erorilor dată de *repartiția Student* decurge astfel:

- se alege un nivel de încredere P^* de 0.9 sau 0.95

- se calculează media rezultatelor individuale \bar{x}

- se calculează estimăția abaterii standard S

- se calculează estimăția abaterii mediei $S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}}$

- se determină, t în funcție de P^* și n

- se determină limitele de încredere $\delta_{x_{max}}$ și $\delta_{\bar{x}}$

- rezultatul se prezintă sub forma: $x = \bar{X} \pm \delta_{\bar{x}}$ sau $x = \bar{X} \pm \delta_{x_{max}}$ cu specificarea nivelului de încredere asociat P^* .

Exemplu: Estimarea erorilor folosind repartiția Student pentru un număr de 5 valori

măsurate ($n=5$). Dacă valorile măsurate ale intensității curentului electric folosind un ampermetru de curent continuu sunt:

Nr. crt	1	2	3	4	5
I	153 mA	162 mA	157 mA	161 mA	155 mA

$$\bar{I} = (153 + 162 + 157 + 161 + 155)/5 = 157 \text{ mA}$$

δ_{x1}	δ_{x2}	δ_{x3}	δ_{x4}	δ_{x5}
157-153=4mA	162-157=5mA	157-157=0mA	161-157=4mA	157-155=2mA

$$S = \sqrt{\frac{\delta x_1^2 + \delta x_2^2 + \delta x_3^2 + \delta x_4^2 + \delta x_5^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{16+25+16+4}{4}} = \sqrt{\frac{61}{4}} = 3.9 \text{ mA}$$

Pentru un nivel de încredere de 95%, variabila $t(95\%, n=5)=2.78$:

$$\delta_{\bar{I}} = \pm \frac{tS}{\sqrt{n}} = \pm \frac{2.78 \cdot 3.9}{\sqrt{5}} = 4.84 \text{ mA},$$

de unde $I=157\text{mA} \pm 4.84\text{mA}$.

5.2. Măsurări de precizie - verificări, etalonări

Datorită preciziei cerute, trebuie ținut cont atât de prezența erorilor aleatoare cât și a celor sistematice. În cazul în care una din cele două erori este predominantă, procedeul poate fi simplificat.

Erorile sistematice se determină din datele de măsurare prin limitele $\pm a$ între care se apreciază că este situată eroarea. Pentru aceasta se folosesc date de catalog și documentațiile tehnice ale instrumentelor folosite (clasa de precizie, de ex.). Întrucât în interiorul acestor limite eroarea sistematică poate lua orice valoare, ea poate fi considerată echiprobabilă în acest domeniu. Aceasta este așa-numita *distribuție rectangulară* pentru care eroarea medie pătratică este dată de: $\sigma_{ech} = a/\sqrt{3}$ (5.9). Incertitudinea aleatoare echivalentă devine: $\varepsilon = \pm t\sigma$ (5.10), unde t se ia din tabel pentru valoarea aleasă P^* a nivelului de încredere și $n \rightarrow \infty$ (metoda aleatorizării erorilor sistematice).

Pentru estimarea erorilor aleatoare se va folosi fie *metoda Student* ($n < 20$) sau *metoda Gauss* ($n > 20$).

Metoda Gauss presupune o densitate de probabilitate descrisă de o funcție de forma:

$$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (5.11),$$

unde μ și σ sunt media și dispersia valorilor variabilei aleatoare.

Media și dispersia pentru un set de n măsurări se determină astfel:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (5.12),$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \delta x_i^2}{n}} \quad (5.13),$$

$$\delta_{x_i} = x_i - \mu \quad (5.14).$$

Probabilitatea ca valoarea să se situeze în interiorul unui interval presupune integrarea densității de probabilitate, lucru care nu poate fi făcut analitic. Acest lucru se poate face prin integrare numerică. Există tabele pentru distribuția normală cu $\mu=0$ și $\sigma^2=1$. Toate celelalte distribuții Gaussiene pot fi reduse la forma normală prin schimbarea de variabilă

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \quad (5.15)$$

Probabilitatea ca variabila aleatoare să ia o valoare în intervalului simetric față de medie $\pm z\sigma$ se calculează cu relația:

$$P(|x - \mu| \leq z \cdot \sigma) = 2 \cdot \Phi(z) \quad (5.16),$$

unde $\Phi(z)$ este integrala *Laplace-Gauss*. Aceasta reprezintă gradul de încredere și are valorile 68.26; 95.46; 99.73 pentru z egal cu 1, 2 și respective 3.

Similar cu *repartiția Student*, estimarea erorilor prin metoda *Gauss* decurge astfel:

- se alege un nivel de încredere P de 0.95 sau 0.99 ($z = 2$ sau $z = 3$)

- se calculează valoarea medie $\mu = \bar{x}$, rel. (5.12)

- se calculează σ , rel. (5.13)

- se calculează eroarea maximă $\delta_{x_{max}} = \pm z\sigma \quad (5.17)$

- se calculează eroarea mediei $\delta_{\mu} = \pm \frac{z\sigma}{\sqrt{n}} \quad (5.18)$

- rezultatul se prezintă sub forma: $x = \mu \pm \delta_{x_{max}}$ sau $x = \mu \pm \delta_{\mu}$, cu specificarea nivelului de încredere P asociat.

Compunerea celor două tipuri de erori este pătratică: $e = \pm \sqrt{\varepsilon^2 + \delta^2} \quad (5.19)$

În final rezultatul măsurării se dă sub forma: $x = \mu \pm e \quad (5.20)$

6. REPREZENTAREA GRAFICA A DATELOR EXPERIMENTALE

În general rezultatele măsurărilor constituie o mulțime dezordonată de valori. Pentru interpretarea comodă a acestora se preferă reprezentarea grafică sub formă de histogramă și poligon de frecvențe. Pentru aceasta intervalul de variație a rezultatelor se împarte în *intervale elementare* de aceeași lungime numite *intervale de grupare*. Lungimea lor se calculează cu formula lui Sturges:

$$d = \frac{x_{min} - x_{max}}{1 + 3.22 \cdot \lg n} \quad (6.1)$$

Numitorul se rotunjește la întregul cel mai apropiat.

- Se întocmește tabelul cu date primare:

Tabelul 2

Nr. crt.	X_i (mărimi măsurate)
1.	
2.	
...	
n.	

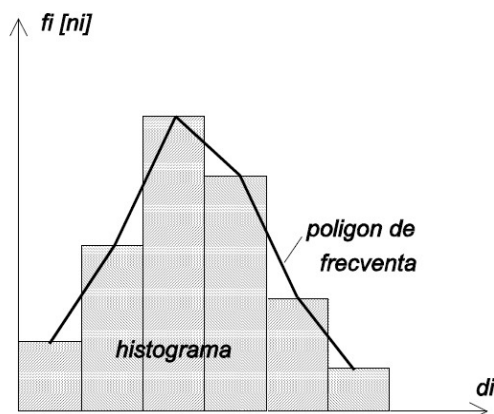
- se ordonează în sens crescător datele din tabelul precedent și pe baza formulei lui Sturges se stabilesc intervalele de grupare sau clase;
- se calculează pentru fiecare interval de grupare valoarea centrală sau medie;
- se determină numărul de date, n_i , corespunzător unei clase (câte valori măsurate se încadrează în intervalul dat). Numărul n_i se numește frecvență absolută;
- se calculează frecvența relativă: $f_i = \frac{n_i}{n}$ (6.2);
- rezultatele se trec în tabelul următor:

Tabelul 3

Intervale de clase	Valoarea centrală a intervalului	Frecvența absolută n_i	Frecvență relativă f_i
$x_{min} - (x_{min} + d)$			
$(x_{min} + d) - (x_{min} + 2d)$			
...			
$(x_{max} - d) - x_{max}$			

- Pentru histogramă se construiesc dreptunghiuri având baza egală cu intervalul de grupare iar înălțimea egală cu frecvența absolută sau relativă;
- Dacă se dorește poligonul de frecvență se unesc prin segmente de dreaptă mijloacele laturilor superioare ale dreptunghiurilor histogramei.

Graficul va avea o alură ca în figura 2.

**Figura 2**

În figură s-au folosit 6 intervale de clase. Primul interval conține valorile cuprinse între x_{min} și $x_{min}+d$, unde x_{min} reprezintă cea mai mică valoare măsurată, al doilea interval conține valorile cuprinse între $x_{min}+d$ și $x_{min}+2d$, iar ultimul interval conține valorile cuprinse între $x_{max}-d$ și x_{max} , unde x_{max} reprezintă cea mai mare valoare măsurată.

7. LUCRARI DE EFECTUAT IN LABORATOR

7.1. Se observă marcarea clasei de precizie pentru câteva etaloane și aparate de măsurat electrice și numerice (digitale). Se notează clasa de precizie așa cum apare marcată, valoarea indicelui de clasă corespunzător, eroarea din care provine și se calculează eroarea relativă procentuală.

7.2. Se verifică un voltmetru analogic de curent continuu prin comparație directă cu unul digital (metoda aparatului etalon). Datele se trec într-un tabel adecvat, de ex. Tabelul 4 și se prelucrează pentru a obține încadrarea într-o clasă de precizie, $c_{exp.}$, ce poate fi diferită de cea marcată, c , atunci când aparatul verificat nu mai măsoară corect.

Tabelul 4

Nr. crt.	U_{V1} [V]	U_{V2} [V]	ΔU [V]	ε_r [%]	ε_R [%]	Observații
1		1				$c =$ $c_{exp.} =$
2		2				
3		3				
4		4				
5		5				
6		6				
7		7				
8		8				
9		9				
10		10				

Știind clasele de precizie, a aparatului etalon și a aparatului verificat, se va aprecia corectitudinea verificării.

7.3. Se măsoară o rezistență de precizie cu un multimetru de precizie. Pentru calculul erorilor se aplică atât metoda Student cât și metoda Gauss pentru $n = 20$ măsurări.

7.4. Se construiește histograma și se comentează modul de distribuție a rezultatelor.

A. Tabelul A.1 - valorile parametrului t pentru distribuția *Student*

$n \backslash P$	50%	60%	70%	80%	90%	95%	98%	99%	99.5%	99.8%	99.9%
2	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	127.3	318.3	636.6
3	0.816	1.080	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.09	22.33	31.60
4	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.21	12.92
5	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
6	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
7	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
8	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
9	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
10	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
11	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
12	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
13	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
14	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
15	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
16	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
17	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
18	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
19	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
20	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
21	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
∞	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807	3.090	3.291

B. Valorile lui z pentru distribuția *Gauss*

$z=1.6$ $P=0.6826$ pentru măsurări uzuale;

$z=2.6$ $P=0.9546$ pentru măsurări de laborator (verificări, etalonări);

$z=3.6$ $P=0.9974$ pentru măsurări de precizie (determinări de constante).