1.3 ESTIMAREA ERORILOR ŞI PRELUCRAREA REZULTATELOR MĂSURĂRII

1.3.1 TIPURI DE ERORI DE MĂSURĂ

a) ***După caracterul lor în timp***:

- **dinamice**;
- **statice**.

b) ***După legătura cu mărimea fizică***:

- **absolută:** $\Delta X = X - Xe$; $-\Delta X = corec\c{t}ie$.
- **relativă:** $\varepsilon_r = \dfrac{\Delta X}{Xe} \cong \dfrac{\Delta X}{X}$
- **raportată:** $\varepsilon_R = \dfrac{\Delta X}{Xc}$.

c) ***După modul de manifestare***:

- **sistematice;**
- **aleatoare**;
- **grosolane (greşeli).**

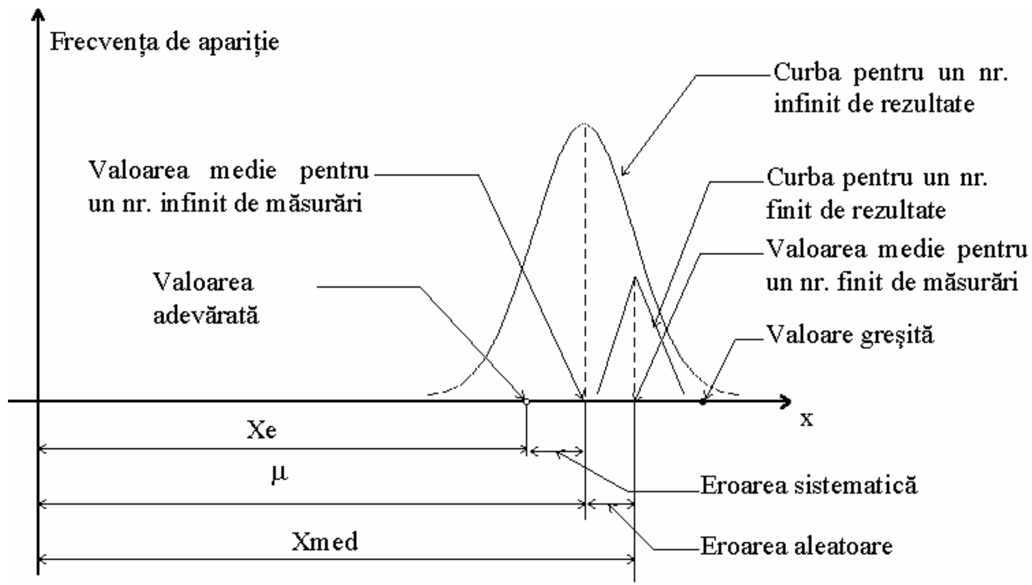


Figura 1.15

d) ***După sursa generatoare***:

- **de model** (d1);
- **de influență** (d2);
- **de interacțiune** (d3);
- **instrumentale** (d4).

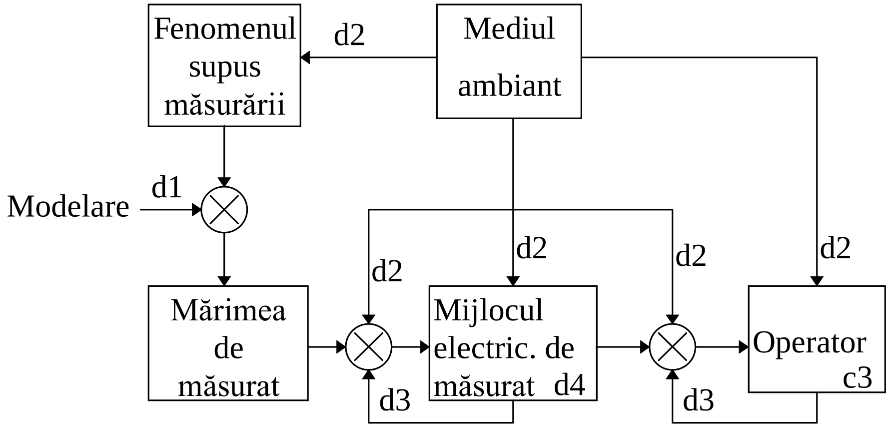


Figura 1.16

1.3.2 ESTIMAREA ERORILOR ALEATOARE PARȚIALE

$F(\xi) = \sum_{x_1}^{x_2} p_i$ **(1.23),** ξ este variabilă aleatoare discretă, sau

$F(\xi) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\cdot dx$ **(1.24),** ξ este variabilă aleatoare continuă.

$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ **(1.25);** $\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\cdot dx$ **(1.26);** $\sigma^2 = D(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty}(x - M(\xi))^2\cdot f(x)\cdot dx$ **(1.27)**

$p(\delta_x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\delta_x^2}{2\sigma^2}}$ **(1.28),** $\delta_x = x - \mu$ **(1.29)**:

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{z^2}{2}}\text{, }\zeta=\frac{x-\mu}{\sigma}\text{, f(z, μ, σ) = f(z, 0, 1)} \tag{1.30}$$

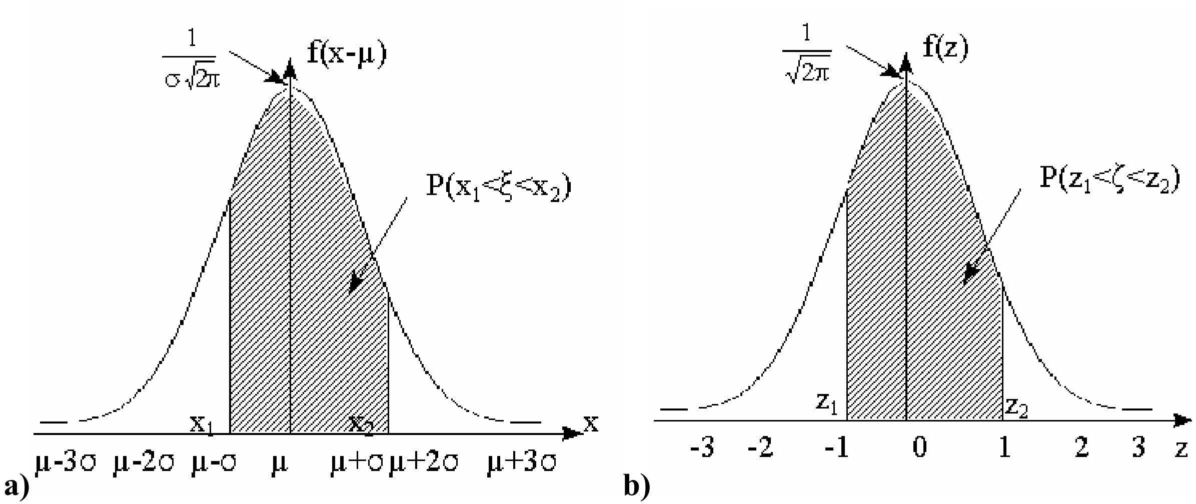


Figura 1.17

funcția Laplace-Gauss $\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x} f(z,0,1)\cdot dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}\cdot dz$ **(1.31)**

$$P(x_1\le\xi\le x_2)=P(z_1\le\zeta\le z_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\left(\int_{-\infty}^{z_2} e^{-\frac{z^2}{2}}\cdot dz-\int_{-\infty}^{z_1} e^{-\frac{z^2}{2}}\cdot dz\right)=\Phi(z_2)-\Phi(z_1) \tag{1.32}$$

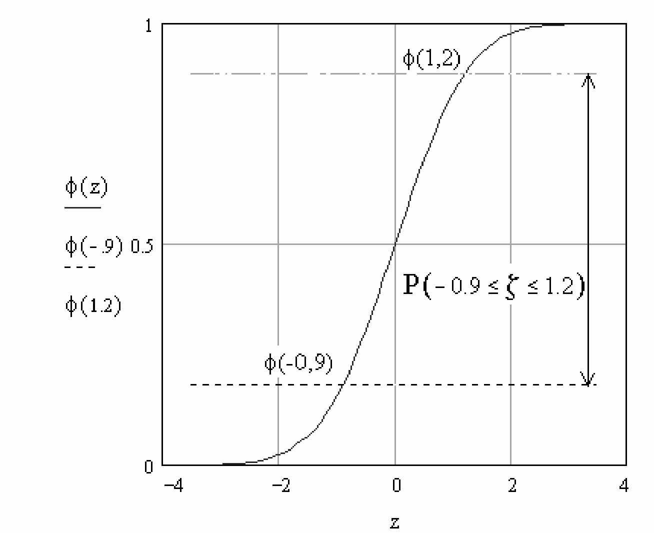


Figura 1.18

Tabelul 1.6

z	1	2	3
P(%)=P^*	68.26	95.46	99.73
t_p(N=10)	1.06	2.3	4.1

$$\Phi(z_p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^{z_p} e^{-\frac{z^2}{2}} \cdot dz = F(z_p) - \frac{1}{2} \quad \textbf{(1.33)} \qquad P(|\xi - \mu| \le z \cdot \sigma) = 2 \cdot \Phi(z_p) \quad \textbf{(1.34)}$$

$$\alpha = P(|\xi - \mu| > z \cdot \sigma) = 1 - 2 \cdot \Phi(z_p) \quad \textbf{(1.35)}$$

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{N} \quad \textbf{(1.36)} \qquad S_{\overline{X}}^2 = D(\overline{X}) = S^2 / N \quad \textbf{(1.37)} \quad S^2 = \frac{N}{N-1} \cdot S_d^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{X})^2}{N-1} \quad \textbf{(1.38)}$$

$t = Z / \sqrt{Y / N}$, $Z(0, \sigma^2)$ iar $Y(\chi^2, N)$, este repartizată *Student* cu *N* grade de libertate.

$$p(t) = \frac{1}{\sqrt{n.\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{(n+1)}{2}} \quad \textbf{(1.39)}$$

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{n.\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \int_{-\infty}^{t} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dt \quad \textbf{(1.40)} \quad \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \overset{\Delta}{=} \int_{0}^{\infty} y^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} .e^{-y}\, dy \quad \textbf{(1.41)}$$

$Z(0, \sigma^2)= \overline{X}-\mu$; $Y=(S_d)^2$; N-1:

$$t = \frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\frac{S_d^2}{N-1}}} = \frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\frac{S^2}{N}}} = \frac{\overline{X}-\mu}{S_{\overline{X}}} \quad \textbf{(1.42)}$$

$$P(-t_p \le t \le t_p) = P(\overline{X} - t_p S_{\overline{X}} \le \mu \le \overline{X} + t_p S_{\overline{X}}) = P^* \quad \textbf{(1.43)}$$

- media rezultatelor se încadrează în intervalul de încredere: $[\overline{X} - t_p \cdot S_{\overline{X}}, \overline{X} + t_p \cdot S_{\overline{X}}]$
- intervalul de încredere al rezultatelor: $[\overline{X} - t_p \cdot S, \overline{X} + t_p \cdot S]$

1.3.3 ESTIMAREA ERORILOR SISTEMATICE PARȚIALE

$$y = f(x) + \sum_{i=1}^{n} f_i(x, v_i) = f(x) + \Delta y \quad \textbf{(1.44)}$$

Eroarea instrumentală de bază: ΔX_i, şi erorile suplimentare, ΔX_{sk}

$$\varepsilon = \Delta X_l = \Delta X_i + \sum_{k=1}^{n} \Delta X_{sk} \quad \textbf{(1.45)}$$

$$\varepsilon = \Delta X_l = \sqrt{\Delta X_i^2 + \sum_{k=1}^{n} \Delta X_{sk}^2} \quad \textbf{(1.46)}$$

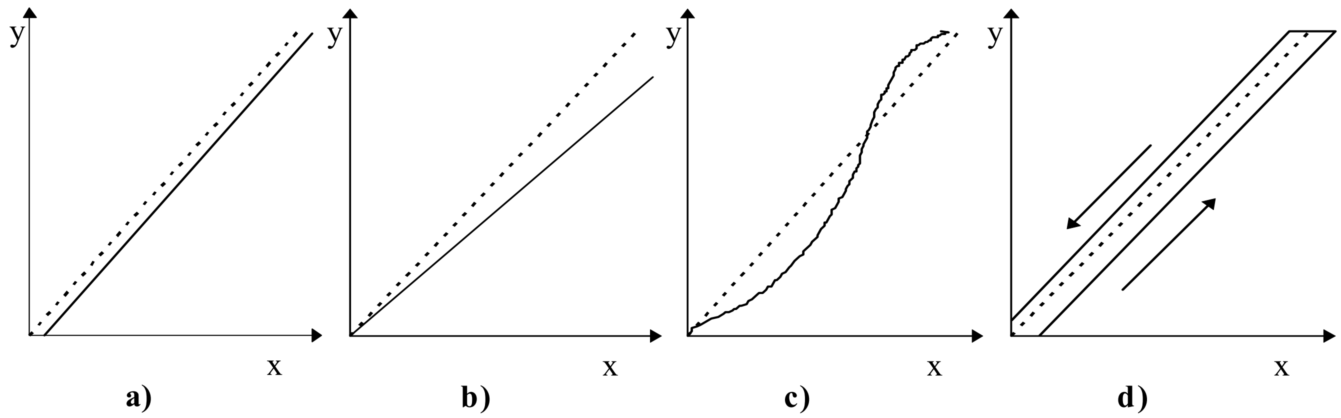


Figura 1.19

Erori tolerate (admisibile): *erori de bază* (erori intrinseci) şi *erori suplimentare* (erori de influenţă).

Erorile de bază
Erorile suplimentare
Erorile tolerate:

a) *Eroarea absolută*: $e = \pm a$ **(1.47)**,

b) *Eroarea relativă:* $e_r = \pm \dfrac{100 \cdot |e|}{x}$ [%] $= \pm\ b$ % **(1.48)**

c) *Eroare raportată:* $e_R = \pm \dfrac{100 \cdot |e|}{X_C}$ [%] $= \pm\ p$ [%] **(1.49)**

d) *Combinaţii de erori relative şi raportate:* $e_r = \pm \left(b + c \cdot \dfrac{Xm}{x} \right)$ [%] **(1.50)**

-sau $e = \pm (b \cdot x + c \cdot x_m)$ **(1.51)** $e = \pm b\,\% \pm \Delta x$, $\Delta x = \text{const.}$ **(1.52)** $e = \pm\ b\,\% \pm n\ \textit{digiti}$ **(1.53)**

Clasa de precizie: 0,001; 0,002; 0,005; 0,01; 0,02; 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1; 2 şi 5.

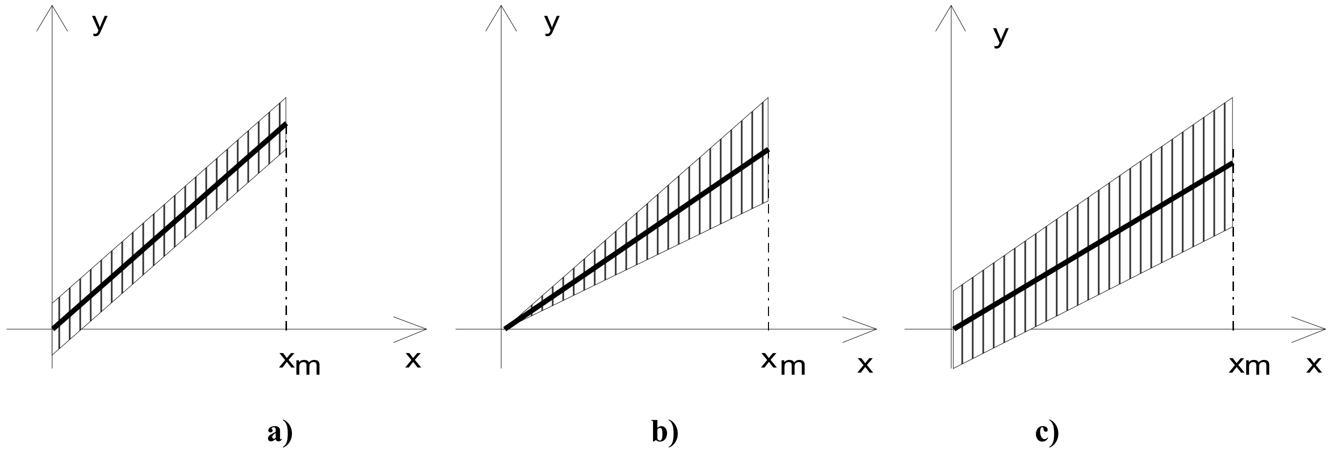


Figura 1.20: a) eroare raportată constantă **b)** eroare relativă constantă **c)** combinație de eroari raportate şi relative constante.

Tabelul 1.7

Modul de exprimare	Eroarea tolerată	Indice de clasă
Eroare relativă	$e_r = \pm b\%$	b
Eroare raportată	$e_R = \pm p\%$	p
Eroare raportată la lungimea scării	$e_R = \pm p\%$	$\underset{\vee}{p}$
Combinatie de er. relativă si raportată	$e_r = [b' + c(\frac{X_m}{x} - 1)]$	b b'/c

Observație

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta x}{Xc} \cdot \frac{Xc}{x} = \varepsilon_R \cdot \frac{Xc}{x} \quad \textbf{(1.54)}$$

1.3.4 ESTIMAREA ERORII TOTALE

A. Estimarea erorii aleatoare totale

$$x = f(a, b, c\dots) \tag{1.55}$$

$$\sigma_x = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 \cdot \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 \cdot \sigma_b^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial c}\right)^2 \cdot \sigma_c^2 + \dots} \tag{1.56}$$

$$S_x = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 \cdot S_a^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 \cdot S_b^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial c}\right)^2 \cdot S_c^2 + \dots} \tag{1.57}$$

a. $\sigma_x = \sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_b^2 + \sigma_c^2 + \dots}$

b. $\frac{S_x}{X} = \sqrt{\left(\frac{S_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{S_b}{b}\right)^2 + \left(\frac{S_c}{c}\right)^2 + \dots}$

B. Estimarea erorii sistematice totale

a) $x + \Delta x = f(a,b,c,\dots) + \frac{\partial f}{\partial a}\cdot\Delta a + \frac{\partial f}{\partial b}\cdot\Delta b + \frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot\Delta c + \dots$ **(1.58)**

$$\frac{\Delta x_l}{x} = \left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| \cdot \frac{a}{f} \cdot \frac{\Delta a}{a} + \left|\frac{\partial f}{\partial b}\right| \cdot \frac{b}{f} \cdot \frac{\Delta b}{b} + \left|\frac{\partial f}{\partial c}\right| \cdot \frac{c}{f} \cdot \frac{\Delta c}{c} + \dots \tag{1.59}$$

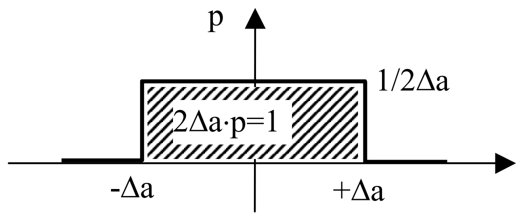
Etape: logaritmarea expresiei (1.55) ~~(1.74)~~; diferențierea; gruparea termenilor; raportarea la variabilă; trecerea la diferențe finite; trecerea la erori relative pentru cazul cel mai defavorabil.

b) Estimarea prin sumarea pătratică

$$\frac{\Delta x_l}{x} = \sqrt{\left|\frac{\partial f}{\partial a}\right|^2 \cdot \left(\frac{a}{f}\right)^2 \cdot \left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial b}\right|^2 \cdot \left(\frac{b}{f}\right)^2 \cdot \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial c}\right|^2 \cdot \left(\frac{c}{f}\right)^2 \cdot \left(\frac{\Delta c}{c}\right)^2 + \ldots} \quad \mathbf{(1.60)}$$

c) Estimarea prin transformarea în erori aleatoare:

$$\sigma_1 = \frac{\Delta a}{\sqrt{3}}\ ;\ \ \sigma_2 = \frac{\Delta b}{\sqrt{3}}\ ;\ \ \sigma_3 = \frac{\Delta c}{\sqrt{3}}\ ;\ldots \quad \mathbf{(1.61)}$$



C. Compunerea erorilor sistematice şi aleatoare totale

$$e = \pm\sqrt{\delta^2 + \varepsilon^2} \quad \mathbf{(1.62)}$$

1.3.5 FORME DE PREZENTARE A REZULTATULUI MĂSURĂRII

a) Măsurări de precizie redusă: $X = X_m \pm \varepsilon$ **(1.63)**

b) Măsurări de precizie medie (afectate de erori aleatoare): distribuția *Student*: $X = \overline{X} \pm \delta$ **(1.64),** P^* - tipic 95%.

c) Măsurări de precizie (etalonări): eroarea aleatoare δ (aplicând distribuția Gauss sau Student, nivelul de încredere de 95…99%) şi eroarea sistematică totală; ε: $X = \overline{X} \pm e$ sau $X = \mu \pm e$ **(1.65)**

1.4 ÎNTREBĂRI DE AUTOCONTROL ŞI PROBLEME

1.4.1 ÎNTREBĂRI

1) Câte sensuri ale noţiunii măsură cunoaşteţi?
2) Care sunt deosebirile dintre metoda de zero şi cea diferenţială?
3) Care dintre metode sunt destinate exclusiv mărimilor active?
4) Puteţi aplica metoda comparaţiei directe 1:1 în cazul unei mărimi pasive cum este rezistenţa?
5) Enumeraţi deosebirile dintre sensibilităţile utile şi cele parazite ale aparatelor de măsurat.
6) Cum puteţi reduce mărimea perturbatoare echivalentă la ieşire?
7) Poate sensibilitatea utilă să fie foarte mare?
8) Ce presupune încadrarea unei mărimi de la o structură de măsurat pasivă la una activă? Este de preferat? Exemplificaţi.
9) Numiţi câteva dispozitive care se încadrează în indicele Miller [el, mc, el].
10) Care sunt deosebirile dintre *sensibilitate* şi *pragul de sensibilitate*?
11) Comparaţi rezoluţia unui voltmetru de 10V/100 div. cu a altui voltmetru de 100V/3 1/2 digiţi.
12) Care dintre aparatele definite de MTBF respectiv MTTFF trebuie să fie mai sigur în funcţionare?
13) Pentru care dintre unităţile fundamentale există cel mai precis etalon şi care sunt performanţele acestuia?
14) Se poate folosi expresia: "valoarea este exact …" ?
15) La aceeaşi eroare procentuală, una relativă şi cealaltă raportată, care descrie un aparat mai precis?
16) Când se poate vorbi despre un aparat de precizie sau de o măsurare precisă?
17) Ce lege de distribuţie puteţi aplica când s-au efectuat 20 măsurări asupra aceleaşi mărimi?
18) Care este relaţia de legătură între intervalul de încredere al rezultatului şi cel al rezultatelor?
19) Cum se poate restrânge intervalul de încredere?
20) De câte măsurări este nevoie pentru a putea estima erorile sistematice?
21) La capăt de scală, care dintre erorile relativă şi raportată este mai mare?

1.4.2 PROBLEME

1) Măsurarea unui lot de elemente Weston a dat valoarea medie de 1,01868V şi o abatere de 10 μV. Să se precizeze tensiunea lotului când:

a) P = 95%, N = 30

b) P^{*}= 95%, N = 9, t(9, 95%) = 2,25

c) P^{*}= 95%, N = 9, $\Delta U_{sist.}$= ± 17,3 μV

2) La măsurarea unui lot de 100 rezistențe s-a găsit valoarea medie 100,15 Ω şi o abatere de 100 mΩ. Să se calculeze:

a) Rmin.; Rmax.

b) Clasa de precizie în care s-ar încadra lotul cu valoarea nominală de 100 Ω.

3) Să se prelucreze următoarele rezultate ale măsurării unei rezistențe: 1x101,1 Ω; 2x101,2 Ω; 3x101,3 Ω; 2x101,4 Ω; 1x101,5 Ω; 1x101,7 Ω.

4) Un miliampermetru are clasa de precizie 0,5 şi gama de 50 mA. Intre ce limite se află valoarea curentului dacă indicația a fost 12,5 mA?

5) Să se traseze grafic limita erorilor la măsurarea tensiunii cu un voltmetru de clasă c = 1 şi gamele de măsură Un = 10; 25; 50; 100; 250 [V]. Care este intervalul maxim de măsurare cu erori minime?

6) Să se traseze grafic limita erorilor la măsurarea tensiunii cu un voltmetru numeric având clasa 0,1/0,1 şi gamele 0,2; 2; 20; 200; 1000 [V].Se consideră eroarea 1/N.

7) Să se calculeze şi să se reprezinte grafic erorile limită la măsurarea puterii disipate de un rezistor R = 100 Ω ± 5% şi Pnom = 100 W când tensiunea aplicată se modifică între 0 şi maxim admisibil. Aparatele utilizate sunt: un voltmetru numeric cu tensiuni nominale 0,2; 2; 20; 200 [V], c_V = 0,2 şi un ampermetru având curenții nominali 0,1; 0,25; 0,5; 1 [A], c_A = 0,5.

8) In ce interval de temperatură şi de timp va fi utilizat un aparat de clasă c = 0,1 şi coeficienți de variație 0,02%/°C respectiv 100 p.p.m./an?

9) Care este abaterea maximă în frecvență a unui etalon cu stabilitate de 10^{-10} şi f_0 = 5 MHz?

10) Să se calculeze câştigul în putere exprimat în dB pentru următoarele puteri (intrare/ieşire): Po = 75 mW, Pi = 5 mW; Po = 45 mW, Pi = 10 μW;Po = 50 mW, Pi = 25 mW;Vo = 0,707 V, Vi = 1 V;P = 10 mW/50Ω.

11) Să se afle amplificarea în putere şi în tensiune pentru următoarele câştiguri în putere:
+40 dB; –13 dB; +6 dB; –3 dB.