

1.3 ESTIMAREA ERORILOR ȘI PRELUCRAREA REZULTATELOR MĂSURĂRII

1.3.1 TIPURI DE ERORI DE MĂSURĂ

a) După caracterul lor în timp:

- dinamice;
- statice.

b) După legătura cu mărimea fizică:

- absolută: $\Delta X = X - X_e$; $-\Delta X = \text{corecție}$.

- relativă: $\varepsilon_r = \frac{\Delta X}{X_e} \cong \frac{\Delta X}{X}$

- raportată: $\varepsilon_R = \frac{\Delta X}{X_c}$.

c) După modul de manifestare:

- sistematice;
- aleatoare;
- grosolane (greșeli).

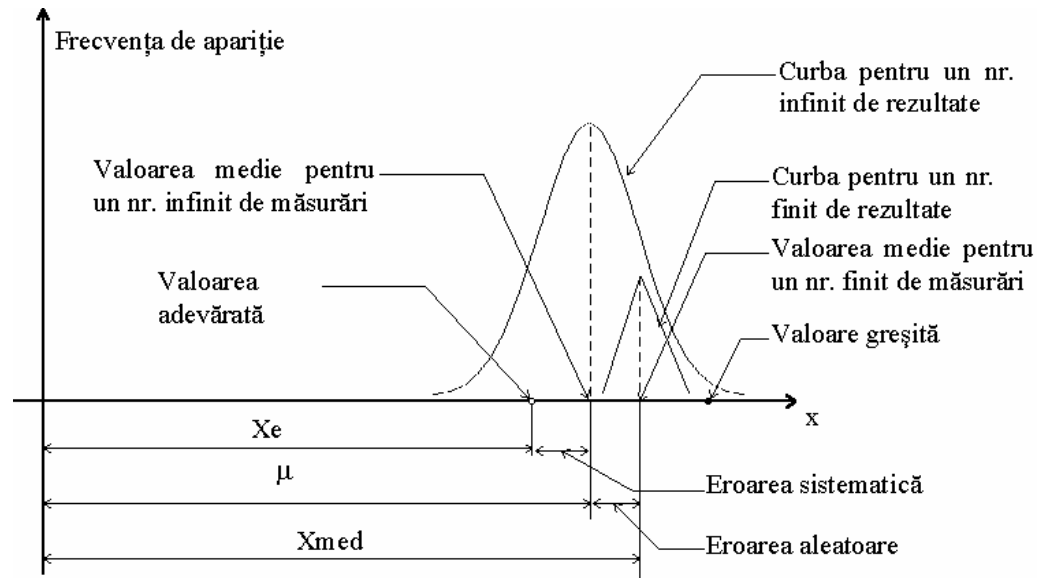


Figura 1.15

d) După sursa generatoare:

- de model (d1);
- de influență (d2);
- de interacțiune (d3);
- instrumentale (d4).

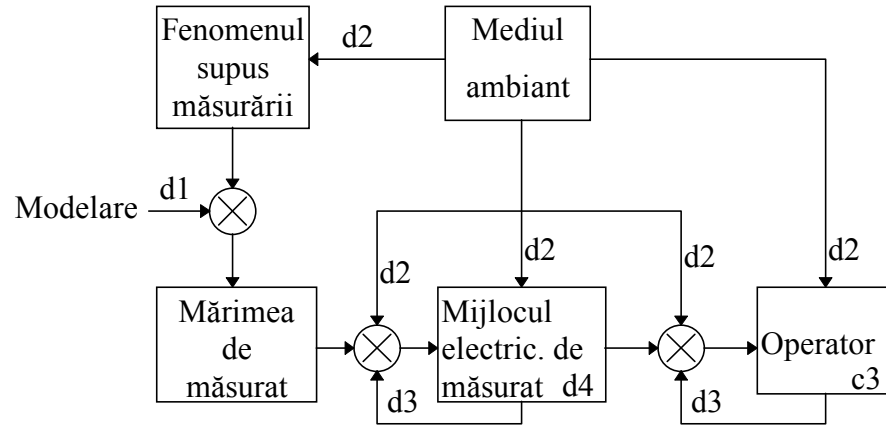


Figura 1.16

1.3.2 ESTIMAREA ERORILOR ALEATOARE PARȚIALE

$$F(\xi) = \sum_{x_1}^{x_2} p_i \quad (1.23), \quad \xi \text{ este variabilă aleatoare discretă, sau}$$

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^x f(x) \cdot dx \quad (1.24), \quad \xi \text{ este variabilă aleatoare continuă.}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (1.27)$$

$$(1.25) \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \cdot dx \quad (1.26) \quad \sigma^2 = D(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(\xi))^2 \cdot f(x) \cdot dx$$

$$p(\delta_x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\delta_x^2}{2\sigma^2}} \quad (1.28), \quad \delta_x = x - \mu \quad (1.29):$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad \zeta = \frac{x - \mu}{\sigma}, \quad f(z, \mu, \sigma) = f(z, 0, 1) \quad (1.30)$$

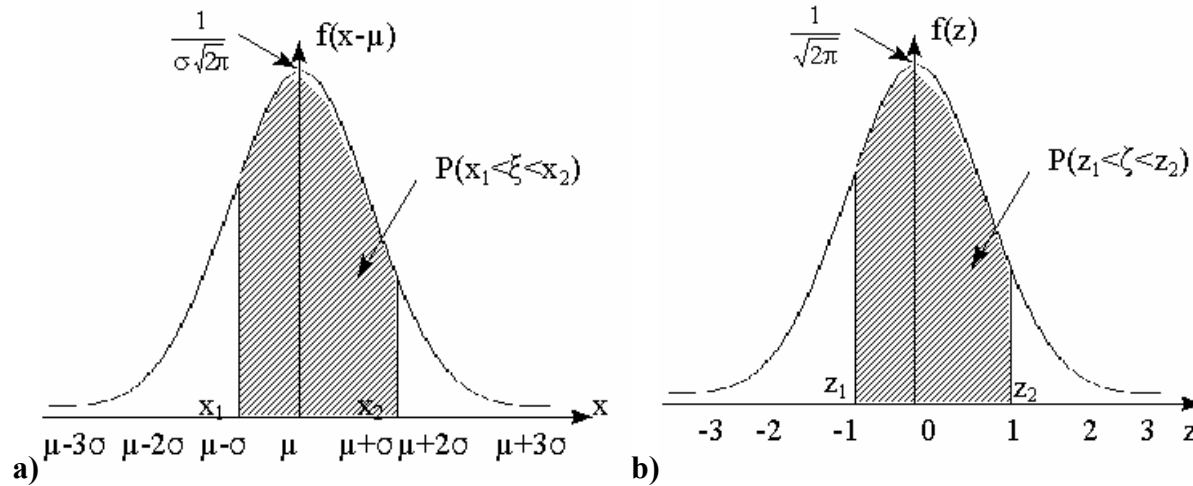


Figura 1.17

funcția Laplace-Gauss $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x f(z, 0, 1) \cdot dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} \cdot dz \quad (1.31)$

$$P(x_1 \leq \zeta \leq x_2) = P(z_1 \leq \zeta \leq z_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(\int_{-\infty}^{z_2} e^{-\frac{z^2}{2}} \cdot dz - \int_{-\infty}^{z_1} e^{-\frac{z^2}{2}} \cdot dz \right) = \Phi(z_2) - \Phi(z_1) \quad (1.32)$$

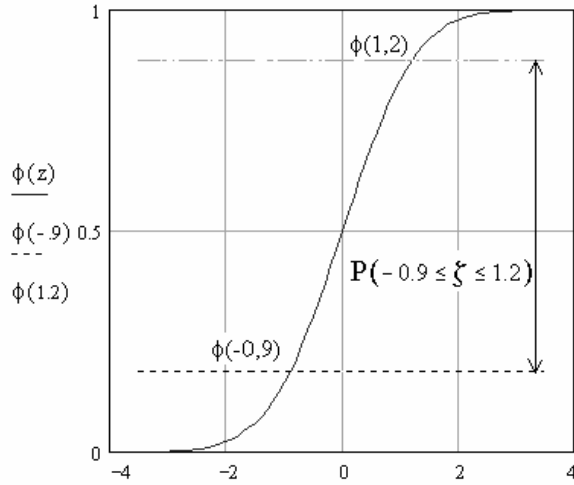


Figura 1.18

Tabelul 1.6

z	1	2	3
P(%)=P*	68.26	95.46	99.73
t _p (N=10)	1.06	2.3	4.1

$$\Phi(z_p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^{z_p} e^{-\frac{z^2}{2}} \cdot dz = F(z_p) - \frac{1}{2} \quad (1.33)$$

$$P(|\xi - \mu| \leq z \cdot \sigma) = 2 \cdot \Phi(z_p) \quad (1.34)$$

$$\alpha = P(|\xi - \mu| > z \cdot \sigma) = 1 - 2 \cdot \Phi(z_p) \quad (1.35)$$

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{N} \quad (1.36)$$

$$S_{\bar{X}}^2 = D(\bar{X}) = S^2 / N \quad (1.37)$$

$$S^2 = \frac{N}{N-1} \cdot S_d^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{X})^2}{N-1} \quad (1.38)$$

$t = Z / \sqrt{Y / N}$, $Z(0, \sigma^2)$ iar $Y(\chi^2, N)$, este repartizată *Student* cu N grade de libertate.

$$p(t) = \frac{1}{\sqrt{n \cdot \pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{(n+1)}{2}} \quad (1.39)$$

$$F(t) = \frac{I}{\sqrt{n \cdot \pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \int_{-\infty}^t \left(I + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dt \quad (1.40) \quad \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \stackrel{\Delta}{=} \int_0^{\infty} y^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} \cdot e^{-y} dy \quad (1.41)$$

$Z(0, \sigma^2) = \bar{X} - \mu; Y = (S_d)^2; N-1:$

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{S_d^2}{N-1}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{S^2}{N}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{S_{\bar{X}}} \quad (1.42)$$

$$P(-t_p \leq t \leq t_p) = P(\bar{X} - t_p S_{\bar{X}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_p S_{\bar{X}}) = P^* \quad (1.43)$$

- media rezultatelor se încadrează în intervalul de încredere: $[\bar{X} - t_p \cdot S_{\bar{X}}, \bar{X} + t_p \cdot S_{\bar{X}}]$
- intervalul de încredere al rezultatelor: $[\bar{X} - t_p \cdot S, \bar{X} + t_p \cdot S]$

1.3.3 ESTIMAREA ERORILOR SISTEMATICE PARȚIALE

$$y = f(x) + \sum_{i=1}^n f_i(x, v_i) = f(x) + \Delta y \quad (1.44)$$

Eroarea instrumentală de bază: ΔX_i , și erorile suplimentare, ΔX_{sk}

$$\varepsilon = \Delta X_l = \Delta X_i + \sum_{k=1}^n \Delta X_{sk} \quad (1.45)$$

$$\varepsilon = \Delta X_l = \sqrt{\Delta X_i^2 + \sum_{k=1}^n \Delta X_{sk}^2} \quad (1.46)$$

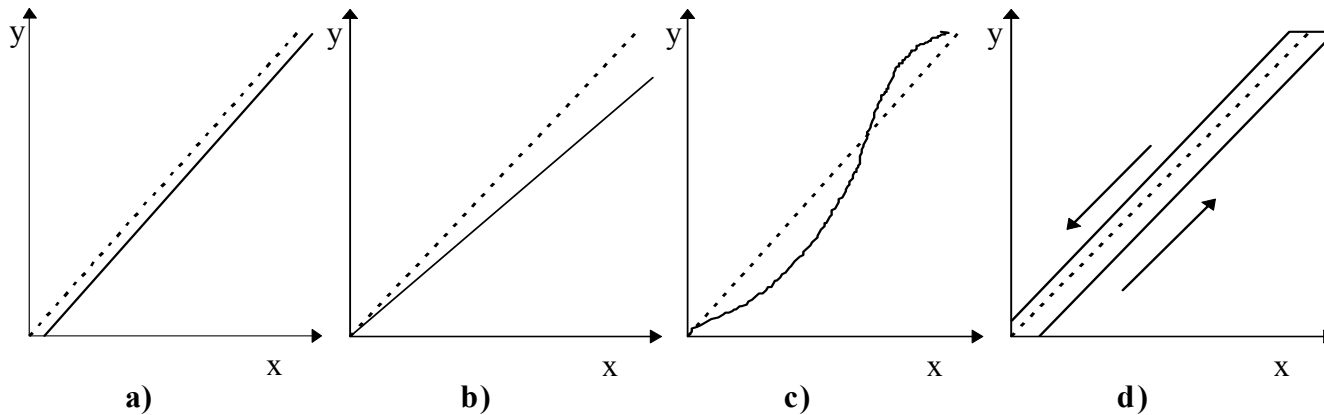


Figura 1.19

Erori tolerate (admisibile): erori de bază (erori intrinseci) și erori suplimentare (erori de influență).

Erorile de bază

Erorile suplimentare

Erorile tolerate:

a) Eroarea absolută: $e = \pm a$ (1.47),

b) Eroarea relativă: $e_r = \pm \frac{100 \cdot |e|}{x}$ [%] = $\pm b$ % (1.48)

c) Eroare raportată: $e_R = \pm \frac{100 \cdot |e|}{X_C}$ [%] = $\pm p$ [%] (1.49)

d) Combinații de erori relative și raportate: $e_r = \pm \left(b + c \cdot \frac{X_m}{x} \right)$ [%] (1.50)

-sau $e = \pm (b \cdot x + c \cdot x_m)$ (1.51) $e = \pm b \% \pm \Delta x$, $\Delta x = \text{const.}$ (1.52) $e = \pm b \% \pm n \text{ digiti}$ (1.53)

Clasa de precizie: 0,001; 0,002; 0,005; 0,01; 0,02; 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1; 2 și 5.

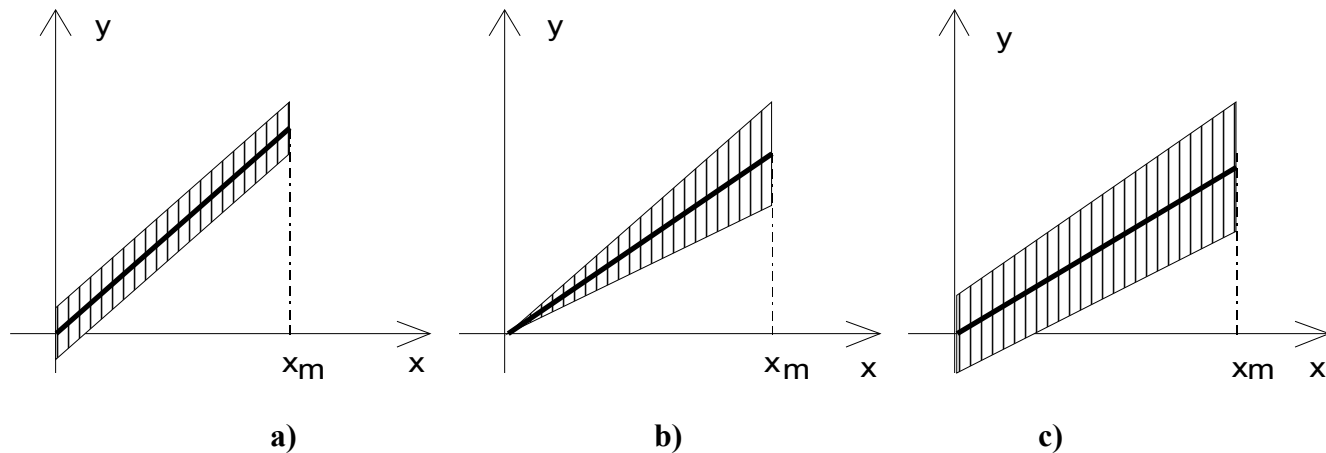


Figura 1.20: a) eroare raportată constantă b) eroare relativă constantă c) combinație de erori raportate și relative constante.

Tabelul 1.7

Modul de exprimare	Eroarea tolerată	Indice de clasă
Eroare relativă	$e_r = \pm b\%$	ⓑ
Eroare raportată	$e_R = \pm p\%$	p
Eroare raportată la lungimea scării	$e_R = \pm p\%$	∨p
Combinatie de er. relativă și raportată	$e_r = [b' + c(\frac{x_m}{x} - 1)]$	ⓑ b'/c

Observatie

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta x}{Xc} \cdot \frac{Xc}{x} = \varepsilon_R \cdot \frac{Xc}{x} \quad (1.54)$$

1.3.4 ESTIMAREA ERORII TOTALE

A. Estimarea erorii aleatoare totale

$$x = f(a, b, c, \dots) \quad (1.55)$$

$$\sigma_x = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 \cdot \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 \cdot \sigma_b^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial c}\right)^2 \cdot \sigma_c^2 + \dots} \quad (1.56)$$

$$S_x = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 \cdot S_a^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 \cdot S_b^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial c}\right)^2 \cdot S_c^2 + \dots} \quad (1.57)$$

$$a. \quad \sigma_x = \sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_b^2 + \sigma_c^2 + \dots}$$

$$b. \quad \frac{S_x}{x} = \sqrt{\left(\frac{S_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{S_b}{b}\right)^2 + \left(\frac{S_c}{c}\right)^2 + \dots}$$

B. Estimarea erorii sistematice totale

$$a) \quad x + \Delta x = f(a, b, c, \dots) + \frac{\partial f}{\partial a} \cdot \Delta a + \frac{\partial f}{\partial b} \cdot \Delta b + \frac{\partial f}{\partial c} \cdot \Delta c + \dots \quad (1.58)$$

$$\frac{\Delta x_l}{x} = \left| \frac{\partial f}{\partial a} \right| \cdot \frac{a}{f} \cdot \frac{\Delta a}{a} + \left| \frac{\partial f}{\partial b} \right| \cdot \frac{b}{f} \cdot \frac{\Delta b}{b} + \left| \frac{\partial f}{\partial c} \right| \cdot \frac{c}{f} \cdot \frac{\Delta c}{c} + \dots \quad (1.59)$$

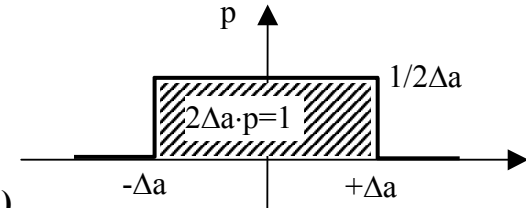
Etape: logaritmarea expresiei (1.55); diferențierea; gruparea termenilor; raportarea la variabilă; trecerea la diferențe finite; trecerea la erori relative pentru cazul cel mai defavorabil.

b) Estimarea prin sumarea pătratică

$$\frac{\Delta x_l}{x} = \sqrt{\left| \frac{\partial f}{\partial a} \right|^2 \cdot \left(\frac{a}{f} \right)^2 \cdot \left(\frac{\Delta a}{a} \right)^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial b} \right|^2 \cdot \left(\frac{b}{f} \right)^2 \cdot \left(\frac{\Delta b}{b} \right)^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial c} \right|^2 \cdot \left(\frac{c}{f} \right)^2 \cdot \left(\frac{\Delta c}{c} \right)^2 + \dots} \quad (1.60)$$

c) Estimarea prin transformarea în erori aleatoare:

$$\sigma_1 = \frac{\Delta a}{\sqrt{3}}; \quad \sigma_2 = \frac{\Delta b}{\sqrt{3}}; \quad \sigma_3 = \frac{\Delta c}{\sqrt{3}}; \dots \quad (1.61)$$



C. Compunerea erorilor sistematice și aleatoare totale

$$e = \pm \sqrt{\delta^2 + \varepsilon^2} \quad (1.62)$$

1.3.5 FORME DE PREZENTARE A REZULTATULUI MĂSURĂRII

a) Măsurări de precizie redusă: $X = X_m \pm \varepsilon$ (1.63)

b) Măsurări de precizie medie (afectate de erori aleatoare): distribuția *Student*: $X = \bar{X} \pm \delta$ (1.64), P^* - tipic 95%.

c) Măsurări de precizie (etalonări): eroarea aleatoare δ (aplicând distribuția Gauss sau Student, nivelul de încredere de 95...99%) și eroarea sistematică totală; ε : $X = \bar{X} \pm e$ sau $X = \mu \pm e$ (1.65)

1.4 ÎNTREBĂRI DE AUTOCONTROL ȘI PROBLEME

1.4.1 ÎNTREBĂRI

- 1) Câte senzori ale noțiunii măsură cunoașteți?
- 2) Care sunt deosebirile dintre metoda de zero și cea diferențială?
- 3) Care dintre metode sunt destinate exclusiv mărimilor active?
- 4) Puteți aplica metoda comparației directe 1:1 în cazul unei mărimi pasive cum este rezistența?
- 5) Enumerați deosebirile dintre sensibilitățile utile și cele parazite ale aparatelor de măsurat.
- 6) Cum puteți reduce mărimea perturbatoare echivalentă la ieșire?
- 7) Poate sensibilitatea utilă să fie foarte mare?
- 8) Ce presupune încadrarea unei mărimi de la o structură de măsurat pasivă la una activă? Este de preferat? Exemplificați.
- 9) Numiți câteva dispozitive care se încadrează în indicele Miller [el, mc, el].
- 10) Care sunt deosebirile dintre *sensibilitate* și *pragul de sensibilitate*?
- 11) Comparați rezoluția unui voltmetru de 10V/100 div. cu a altui voltmetru de 100V/3 1/2 digiți.
- 12) Care dintre aparatele definite de MTBF respectiv MTTF trebuie să fie mai siguri în funcționare?
- 13) Pentru care dintre unitățile fundamentale există cel mai precis etalon și care sunt performanțele acestuia?
- 14) Se poate folosi expresia: “valoarea este exact ...” ?
- 15) La aceeași eroare procentuală, una relativă și cealaltă raportată, care descrie un aparat mai precis?
- 16) Când se poate vorbi despre un aparat de precizie sau de o măsurare precisă?
- 17) Ce lege de distribuție puteți aplica când s-au efectuat 20 măsurări asupra aceleiași mărimi?
- 18) Care este relația de legătură între intervalul de încredere al rezultatului și cel al rezultatelor?
- 19) Cum se poate restrânge intervalul de încredere?
- 20) De câte măsurări este nevoie pentru a putea estima erorile sistematice?
- 21) La capăt de scală, care dintre erorile relativă și raportată este mai mare?

1.4.2 PROBLEME

1) Măsurarea unui lot de elemente Weston a dat valoarea medie de 1,01868V și o abatere de 10 μ V. Să se precizeze tensiunea lotului când:

a) $P = 95\%$, $N = 30$

b) $P^* = 95\%$, $N = 9$, $t(9, 95\%) = 2,25$

c) $P^* = 95\%$, $N = 9$, $\Delta U_{\text{sist.}} = \pm 17,3 \mu\text{V}$

2) La măsurarea unui lot de 100 rezistențe s-a găsit valoarea medie 100,15 Ω și o abatere de 100 m Ω . Să se calculeze:

a) $R_{\text{min.}}$; $R_{\text{max.}}$

b) Clasa de precizie în care s-ar încadra lotul cu valoarea nominală de 100 Ω .

3) Să se prelucreze următoarele rezultate ale măsurării unei rezistențe: 1x101,1 Ω ; 2x101,2 Ω ; 3x101,3 Ω ; 2x101,4 Ω ; 1x101,5 Ω ; 1x101,7 Ω .

4) Un miliampermetru are clasa de precizie 0,5 și gama de 50 mA. Intre ce limite se află valoarea curentului dacă indicația a fost 12,5 mA?

5) Să se traseze grafic limita erorilor la măsurarea tensiunii cu un voltmetru de clasă $c = 1$ și gamele de măsură $U_n = 10; 25; 50; 100; 250$ [V]. Care este intervalul maxim de măsurare cu erori minime?

6) Să se traseze grafic limita erorilor la măsurarea tensiunii cu un voltmetru numeric având clasa 0,1/0,1 și gamele 0,2; 2; 20; 200; 1000 [V]. Se consideră eroarea 1/N.

7) Să se calculeze și să se reprezinte grafic erorile limită la măsurarea puterii disipate de un rezistor $R = 100 \Omega \pm 5\%$ și $P_{\text{nom}} = 100 \text{ W}$ când tensiunea aplicată se modifică între 0 și maxim admisibil. Aparatele utilizate sunt: un voltmetru numeric cu tensiuni nominale 0,2; 2; 20; 200 [V], $c_V = 0,2$ și un ampermetru având curenții nominali 0,1; 0,25; 0,5; 1 [A], $c_A = 0,5$.

8) In ce interval de temperatură și de timp va fi utilizat un aparat de clasă $c = 0,1$ și coeficienți de variație 0,02%/°C respectiv 100 p.p.m./an?

9) Care este abaterea maximă în frecvență a unui etalon cu stabilitate de 10^{-10} și $f_0 = 5 \text{ MHz}$?

10) Să se calculeze câștigul în putere exprimat în dB pentru următoarele puteri (intrare/ieșire): $P_o = 75 \text{ mW}$, $P_i = 5 \text{ mW}$; $P_o = 45 \text{ mW}$, $P_i = 10 \mu\text{W}$; $P_o = 50 \text{ mW}$, $P_i = 25 \text{ mW}$; $V_o = 0,707 \text{ V}$, $V_i = 1 \text{ V}$; $P = 10 \text{ mW}/50\Omega$.

11) Să se afle amplificarea în putere și în tensiune pentru următoarele câștiguri în putere: +40 dB; -13 dB; +6 dB; -3 dB.